INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVII. BAND VIERTES HEFT 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 26.80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Stuttgart N, Roseggerweg 8

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Wüst, Walter, Die Biegeschwingungen einseitig eingespannter gekrümmter Stäbe und Rohre. Mit 4 Textabbildungen 265

Helmbold, Heinrich Bruno, Zur Berechnung des Profilwiderstands 273

Helmbold, Heinrich Bruno, Über den durch einen Verdichtungsstoß verursachten Zusatzauftrieb. Mit 1 Textabbildung 280

Ludwieg, Hubert, und *Walter Tillmann*, Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. Mit 8 Textabbildungen 288

Denkhaus, Günter, Über Werkstoffdämpfung bei Biegeschwingungen. Mit 4 Textabbildungen 300

Meyer zur Capellen, Walther, Die Bahn des Momentanpols und die Kardanlage. Mit 11 Textabbildungen 308

Fadle, Johann, Der homogene, durchlaufende Träger auf unverschieblichen Stützen. Mit 2 Textabbildungen 317

Rubbert, Friedrich Karl, Der Einfluß der Dämpfung bei nichtlinearen Schwingungen (I. Gedämpfte Pendelschwingungen) 336

Swida, Waldemar, Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes unter Berücksichtigung der Materialverfestigung. Mit 13 Textabbildungen 343

INGENIEUR-ARCHIV

XVII. BAND VIERTES HEFT 1949

Die Biegeschwingungen einseitig eingespannter gekrümmter Stäbe und Rohre.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Kreisförmig gekrümmte Rohre von ovalem Querschnitt werden in der Druckmeßtechnik in Gestalt der sogenannten *Bourdon*rohre[1] angewandt. Das Schwingungsverhalten solcher Röhrenfedern interessiert deswegen, weil nicht selten beim Einbau der Druckmesser an Stellen, die starken Erschütterungen ausgesetzt sind (z. B. bei Pumpen, Kompressoren, Dieselmaschinen usw.) Resonanzschwingungen auftreten, die sehr unerwünscht sind. Ferner ist es wertvoll, die Eigenschwingungszahl von Röhrenfedern in denjenigen Fällen zu kennen, in denen diese bei Registriergeräten zur Aufnahme von Druckschwingungen als Meßorgane dienen. In der Technik treten Schwingungsaufgaben auf, die eine gewisse Ähnlichkeit mit dem hier behandelten Problem haben[2]. Insbesondere ist auf die Schwingungen der Rahmen von Wechselstrommaschinen sowie auf die Schwingungen von Kreisbogenträgern im Brückenbau hinzuweisen. Bei diesen Aufgaben ist der Kreisbogen beiderseitig fest eingespannt oder gelenkig befestigt, während in unserem Fall die Röhrenfeder einseitig fest eingespannt ist und das andere Ende frei schwingen kann, soweit keine Behinderung durch Übertragungsorgane stattfindet.

Die Ermittlung der Eigenschwingungszahlen kreisbogenförmig gekrümmter Stäbe wurde erstmalig von *H. Lamb*[3] in Angriff genommen und unter der Annahme geringer Anfangskrümmung und dehnungsloser Stabachse genähert durchgeführt. Wegen der rechnerischen Schwierigkeiten bei beliebig großem Öffnungswinkel wendet *I. P. Den Hartog*[4] das Näherungsverfahren von *Rayleigh-Ritz* auf den Kreisbogen bei festgehaltenen Enden an. *K. Federhofer*[5] berücksichtigt noch eine radiale Belastung des Kreisbogens. Dabei taucht aber die Frage auf, ob nicht gerade die vernachlässigten Achsdehnungen von entscheidendem Einfluß auf das Schwingungsverhalten sind. Diese Frage wird von *F. W. Waltking*[6] untersucht, der für den Zweigelenkbogen die Lösungen der vollständigen Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Achsdehnung entwickelt. Bei den gegensymmetrischen Schwingungen (Schwingungsknoten in der Mitte) ist die Achsdehnung ohne Einfluß, bei den symmetrischen Schwingungen macht sich dagegen ein wesentlicher Einfluß geltend. Wenn der kreisbogenförmig gekrümmte Stab nur am einen Ende fest eingespannt ist, darf man sicher annehmen, daß die Achsdehnungen keinen merklichen Einfluß auf das Schwingungsverhalten haben. Aus diesem Grunde beschränkt sich die folgende Untersuchung auf den dehnungslosen Fall.

2. Ableitung der Frequenzgleichung. Der normale Bewegungsablauf der Röhrenfeder als Druckmeßglied spielt sich ausschließlich in der Ringebene ab. Aus diesem Grunde beschränken wir uns im folgenden auf Biegeschwingungen in der Ringebene, zumal diese wegen der geringeren Steifigkeit der Röhrenfeder in dieser Richtung leichter angeregt werden. Allgemeinere Ansätze sind von *K. Federhofer*[7] angegeben worden.

Im folgenden sei mit u die Normalverschiebung, mit v die Tangentialverschiebung eines Ringelementes bezeichnet. Ferner sei μ die Masse in der Längeneinheit des Umfanges, und r der Krümmungshalbmesser der neutralen Faser. Bezeichnet man außerdem entsprechend Abb. 1

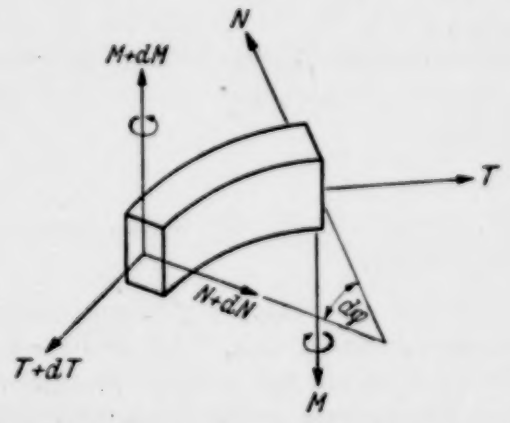


Abb. 1. Kräfte und Momente an einem Federelement.

[1] Vgl. z. B. *W. Wuest*, Arch. techn. Messen V 1343-3 (1943) und V 1343-5/6 (1948).
[2] *S. Timoshenko*, Schwingungsprobleme der Technik, S. 320. Berlin 1932.
[3] *H. Lamb*, Proc. London Math. Soc. 19 (1888) S. 365.
[4] *I. P. Den Hartog*, Philos. Mag. London (7) 5 (1928) S. 400; Amer. Soc. Mech. Engr. Appl. Mec. Div. 49 (1928).
[5] Ing.-Arch. 4 (1933) S. 276.
[6] Ing.-Arch. 5 (1934) S. 429; Zuschrift von *K. Federhofer*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 223.
[7] *K. Federhofer*, a. a. O.

mit N die Normalkraft, mit T die Tangentialkraft und mit M das Biegungsmoment, so ergeben sich, ausgehend vom Gleichgewicht der in normaler und tangentieller Richtung wirkenden Kräfte und der Momente, folgende Schwingungsgleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} - N = \mu r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} + T = \mu r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} + rN = 0. \tag{3}$$

Die Gleichungen gelten für den Fall, daß die Querschnittsabmessungen klein gegen den Krümmungshalbmesser sind. Aus diesem Grunde konnte auch in Gleichung (3) auf der rechten Seite die rotatorische Trägheit des Längenelementes vernachlässigt werden.

Aus den Gleichungen (1) bis (3) findet man durch Eliminieren von N und T:

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 M}{\partial \varphi^3} = \mu r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial \varphi} + v\right). \tag{4}$$

Die Vernachlässigung der Dehnung der Stabachse drückt sich in folgender Beziehung aus:

$$u = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{5}$$

Es ist bekannt, daß dünnwandige Rohre einem Biegemoment, das die Krümmung zu vergrößern oder zu verkleinern sucht, einen geringeren Widerstand entgegensetzen als ein Vollquerschnitt von gleichem geometrischen Trägheitsmoment. Diese Erscheinung hängt damit zusammen, daß der dünnwandige Querschnitt hierbei beträchtliche Deformationen erleidet. Wir berücksichtigen diese Erscheinung dadurch, daß wir an Stelle des geometrischen Trägheitsmomentes J_0 das wirksame Trägheitsmoment $J_{eff} = \beta J_0$ einführen, wobei β ein Faktor ist, der von der Querschnittsform (Kreis, Ellipse usw.), von der Wandstärke und vom Krümmungshalbmesser abhängt. Für Vollquerschnitte und Rohre genügender Wandstärke ist $\beta = 1$ zu setzen. Für die bei *Bourdon*federn üblichen Ovalquerschnitte („Langrund-" oder „Flachbogen"querschnitt) ist der Faktor β für verschiedene Achsenverhältnisse in einem früheren Aufsatz des Verfassers[1] angegeben.

Bei Einführung des wirksamen Trägheitsmomentes J_{eff} besteht dann folgender Zusammenhang des Biegungsmomentes M mit der Radialverschiebung u:

$$\frac{M}{E J_{eff}} = \frac{1}{r^2}\left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right). \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (4) bis (6) findet man durch Eliminieren von M und u folgende Differentialgleichung sechster Ordnung:

$$\frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{r^4 \mu}{E J_{eff}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v\right). \tag{7}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$v = A e^{n\varphi} \cos(\omega t + \varepsilon) \tag{8}$$

erhält man folgende Gleichung für n:

$$n^2(n^2+1)^2 = k(n^2-1), \tag{9}$$

wobei

$$k = \frac{r^4 \mu \omega^2}{E J_{eff}}$$

ist. Bevor wir die allgemeine Lösung von (9) diskutieren, wollen wir zunächst einen Sonderfall betrachten.

3. Die masselose Feder mit einer Punktmasse am Federende. Wegen $\mu = 0$ entspricht die masselose Feder dem Grenzfall $k = 0$. Dabei soll aber am Federende eine Punktmasse m sitzen. Dieser Fall ist mit einiger Annäherung verwirklicht, wenn am Federende eine im Verhältnis zur Federmasse große Endstückmasse befestigt ist. Man kann diesen Fall auch unmittelbar behandeln, ohne von der Differentialgleichung (7) auszugehen[2]. Dieser Sonderfall soll hier jedoch aus der allgemeinen Gleichung (7) abgeleitet werden. Mit $k = 0$ lauten die Wurzeln der Gleichung (9):

$$n_{1,2} = 0 \qquad n_{3,4,5,6} = \pm i,$$

---

[1] *W. Wuest*, Technik 3 (1948) S. 23. Der Faktor β ist dort in Abb. 4c mit F_2 bezeichnet. In Abb. 4a dieser Arbeit sind die Bezeichnungen $\alpha = 0$ und $\alpha = 0{,}3$ irrtümlich vertauscht.

[2] *W. Wuest*, Technik 4 (1949) H. 6 S. 277.

und die Lösung (8) lautet daher:

$$v = (A_0 + A_1\varphi + A_2\cos\varphi + A_3\sin\varphi + A_4\varphi\cos\varphi + A_5\varphi\sin\varphi)\cos(\omega t + \varepsilon)\,. \tag{10}$$

Die Konstanten A_0 bis A_5 werden daraus bestimmt, daß am eingespannten Ende $\varphi=\varphi^*$ die Radial- und Tangentialverschiebungen und deren erste Ableitungen verschwinden müssen, d. h. für $\varphi=\varphi^*$ gilt $v=v'=v''=0$, wobei die Striche Ableitungen nach φ bezeichnen. Drei weitere Bedingungen gewinnt man daraus, daß am freien Federende $\varphi=0$ das Moment M verschwinden muß und die Tangential- und Radialkraft gleich den Trägheitskräften der Punktmasse am Federende ist. Aus (2), (3) und (6) findet man aber für die Radial- und Tangentialkraft

$$N = -\frac{EJ_{eff}}{r^3}(v'''' + v'')\,, \tag{11}$$

$$T = \frac{EJ_{eff}}{r^3}(v^V + v''') - \mu r\omega^2 v'\,. \tag{12}$$

Für die masselose Feder ist $\mu=0$, so daß die drei Bedingungen für das freie Federende $\varphi=0$ lauten

$$\begin{aligned} v' + v''' &= 0\,,\\ v'' + v'''' &= k_1 v'\,,\\ v'' + v^V &= -k_1 v\,, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei

$$k_1 = \frac{r^3 m}{EJ_{eff}}$$

ist. Setzt man die Lösung (10) in die sechs Randbedingungen ein, so erhält man sechs Bedingungsgleichungen, die nur dann nichttriviale Lösungen haben, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Statt φ^* wird in den folgenden Gleichungen dieses Abschnittes kürzer φ geschrieben. Man erhält also folgende Determinantenbedingung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi & \cos\varphi & \sin\varphi & \varphi\cos\varphi & \varphi\sin\varphi \\ 0 & 1 & -\sin\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi - \varphi\sin\varphi & \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi & -2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi & 2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & -k_1 & -k_1 & -2 \\ k_1 & 0 & k_1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die Auflösung der Determinante ergibt

$$\left(\varphi - \frac{2}{k_1}\right)^2 + 2\left(\varphi - \frac{2}{k_1}\right)(\varphi - 2\sin\varphi) + \left[4\cos\varphi(1-\cos\varphi)^2 - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \sin^2\varphi(4\cos\varphi - 1)\right] = 0\,. \tag{14}$$

Bei gegebenem Windungswinkel φ erhält man also zwei Lösungen für k_1, und es läßt sich zeigen, daß die Schwingungsrichtungen der Punktmasse in den beiden Fällen senkrecht aufeinander stehen. Wir wollen die langsamere Schwingung als Hauptschwingung, die schnellere als Nebenschwingung bezeichnen, weil diese gewöhnlich rascher gedämpft wird. Die Eigenschwingungszahl ergibt sich zu:

$$\omega^2 = \frac{k_1 EJ_{eff}}{m r^3}\,. \tag{15}$$

In Tabelle 1 sind einige Werte für $1/k_1$ zusammengestellt. In Abb. 2 ist das Verhältnis der Frequenzen von Neben- und Hauptschwingung dargestellt. Man erkennt, daß für den bei Röhrenfedern häufig benutzten Windungswinkel von $\varphi=270°$ die Frequenzen sich etwa wie 2:1 verhalten.

Tabelle 1.

φ	$1/k_1$	
	Hauptschwingung	Nebenschwingung
0	$\frac{1}{3}\varphi^3$	0
$\frac{1}{2}\pi$	1,1149	0,02567
π	5,685	0,598
$\frac{3}{2}\pi$	9,1057	2,3191
2π	3π	π

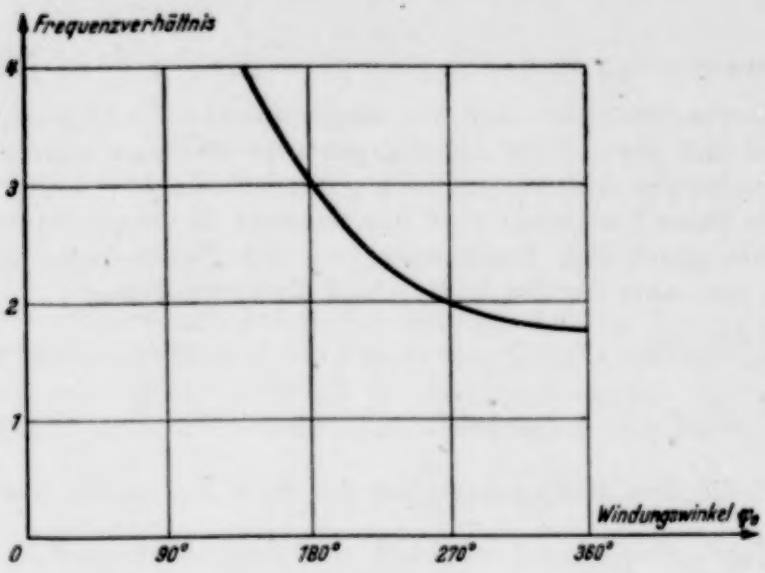


Abb. 2. Verhältnis der Frequenzen der Neben- und Hauptschwingung einer masselosen nur am Ende belasteten Feder.

In der Tat kann man bei derartigen Röhrenfedern *Lissajous*sche Figuren dieses Frequenzverhältnisses beobachten. Wegen des nicht genau ganzzahligen Verhältnisses werden die verschiedenen Figuren rasch durchlaufen. Bei größeren Schwingungsamplituden bemerkt man, daß die Hauptschwingung auf einer nach außen (also entgegengesetzt zur Krümmung der Röhrenfeder) gebogenen Bahn verläuft. Die schnellere Nebenschwingung wird rasch gedämpft und tritt daher weniger in Erscheinung.

4. Die gleichmäßig mit Masse belegte Feder. Wir wenden uns jetzt der allgemeinen Untersuchung von Gleichung (9) zu, die eine Gleichung dritten Grades für n^2 darstellt. Indem wir $n^2 = x$ setzen, tragen wir zunächst die Kurve $y = x\,(1+x)^2$ auf (Abb. 3). Dann legen wir durch den Punkt $y=0$, $x=1$ ein Geradenbüschel $y = k(x-1)$ mit k als Parameter. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve dritten Grades ergeben die Lösungen x_1, x_2, x_3. Wie man aus Abb. 3 erkennt, stellen sich Grenzfälle dadurch ein, daß die Gerade die Kurve berührt. Durch diese Grenzlagen wird das Geradenbüschel in drei Bereiche getrennt, wobei im mittleren Bereich (II) nur ein reeller Schnittpunkt vorhanden ist.

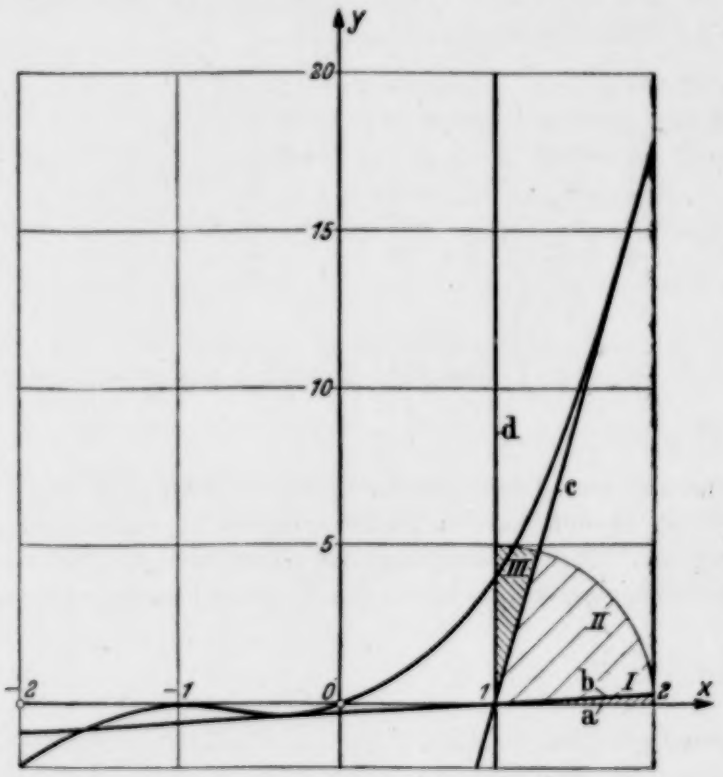


Abb. 3. Graphische Lösung der Gleichung (9) mit Einzeichnung der Grenzlagen.

Analytisch sind die Grenzfälle gegeben durch

$$k\left(k^2 - \frac{71}{4}k + 2\right) = 0 \qquad (16)$$

mit den Lösungen

$$k = 0$$

$$k = \frac{71 - 17\sqrt{17}}{8} = 0{,}11340\,,$$

$$k = \frac{71 + 17\sqrt{17}}{8} = 17{,}6366\,.$$

Eine der Wurzeln von $n^2 = x$ ist stets reell negativ, während die anderen beiden ein verschiedenartiges Verhalten zeigen, wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist. In dieser Tabelle sind zur Kennzeichnung der verschiedenen Lösungsbereiche und Grenzlagen die gleichen Symbole wie in Abb. 3 verwendet (1. Spalte). Im Lösungsbereich II sind die Wurzeln n_2^2 und n_3^2 konjugiert komplex. Über die Bedeutung der ebenfalls in Tabelle 2 angegebenen Größen λ, μ, ν, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, α, β, siehe nächste Seite.

Am fest eingespannten Federende $\varphi = \varphi^*$ lauten offenbar die Randbedingungen wie im vorhergehenden Abschnitt

$$v = v' = v'' = 0\,. \qquad (17)$$

Die Striche bezeichnen hierbei wiederum die Ableitungen nach φ. Am freien Ende $\varphi = 0$ muß andererseits das Moment, die Normal- und Tangentialkraft verschwinden. Aus (5), (6), (11) und (12) folgt dann für $\varphi = 0$

$$\left.\begin{aligned} v' + v''' &= 0\,, \\ v'' + v'''' &= 0\,, \\ v''' + v^V &= k v'\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Tabelle 2. *Wurzeln der Gleichung* (9).

	k	n_1^2	n_2^2	n_3^2	λ	μ	ν
a	$k \to 0$	$-1-\sqrt{2k}$	$-1+\sqrt{2k}$	k	$1+\sqrt{k/2}$	$1-\sqrt{k/2}$	$\sqrt{k}$
I	0,025	−1,2135	−0,7593	−0,027131	1,1016	0,8714	0,16471
	0,050	−1,29756	−0,64246	−0,05999	1,13910	0,80153	0,24492
	0,075	−1,36072	−0,53656	−0,10274	1,16650	0,73250	0,32055
	0,100	−1,41334	−0,41714	−0,16964	1,18884	0,64587	0,41287
	0,1125	−1,43691	−0,31319	−0,25000	1,19867	0,55964	0,50000
b	0,11340	−1,43849	−0,28076	−0,28076	1,1994	0,5298	0,5298
	k	n_1^2	$n_{2,3}^2$		λ	α	β
II	0,15	−1,50135	−0,24932	$\pm 0{,}1938\,i$	1,2253	0,18256	0,5320
	0,30	−1,6909	−0,15455	$\pm 0{,}3918\,i$	1,3003	0,3655	0,5365
	2/3	−2		$\pm\sqrt{1/3}\,i$	1,41421	0,53729	0,53729
	3	−3	0,5	$\pm\sqrt{3/4}\,i$	1,73205	0,86603	0,50000
	36/5	−4	1,0	$\pm\sqrt{4/5}\,i$	2,00000	1,08195	0,41369
	40/3	−5	1,5	$\pm\sqrt{5/12}\,i$	2,23607	1,25160	0,25786
c	17,6366	−5,5617	1,7808		2,3583	1,3345	0
	k	n_1^2	n_2^2	n_3^2	λ	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$
III	150/7	− 6,0000	1,34535	2,65465	2,4495	1,1600	1,3393
	100	−11,4291	1,04360	8,3853	3,3807	1,0218	2,8957
	211, 765	−16,0000	1,01964	12,9804	4,0000	1,00981	3,60283
	1000	−33,1070	1,00404	30,0927	5,7539	1,00202	5,4857
	3000	−56,2577	1,00133	53,2558	7,5004	1,000668	7,2976
d	$k \to \infty$	$-\sqrt{k}$	1	$\sqrt{k}$	$\sqrt[4]{k}$	1	$\sqrt[4]{k}$

Die Lösungen haben in den drei in Abb. 3 gekennzeichneten Lösungsbereichen eine verschiedene Form. Wir behandeln daher die drei Bereiche getrennt:

a) Lösungsbereich I: $0 \leqq k \leqq 0{,}11340$. Alle sechs Wurzeln der Gleichung (9) sind rein imaginär, und zwar paarweise mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich. Wir setzen daher

$$n_1 = \pm i\lambda, \qquad n_2 = \pm i\mu, \qquad n_3 = \pm i\nu.$$

Die Werte λ, μ, ν finden sich in den drei rechten Spalten der Tabelle 2. Die Lösung hat dann im Bereich I folgende Form:

$$v = \sum_{m=1}^{3} (A_m \cos \sigma_m \varphi + B_m \sin \sigma_m \varphi) \cos(\omega t + \varepsilon), \tag{19}$$

wobei

$$\sigma_1 = \lambda, \qquad \sigma_2 = \mu, \qquad \sigma_3 = \nu$$

ist. Die Randbedingungen (17) und (18) liefern ein System von sechs Gleichungen für die A_m und B_m. Das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten ergibt die „Frequenzgleichung", wobei im folgenden wieder statt φ^* einfacher φ geschrieben wird:

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda\varphi & \sin\lambda\varphi & \cos\mu\varphi & \sin\mu\varphi & \cos\nu\varphi & \sin\nu\varphi \\ -\lambda\sin\lambda\varphi & \lambda\cos\lambda\varphi & -\mu\sin\mu\varphi & \mu\cos\mu\varphi & -\nu\sin\nu\varphi & \nu\cos\nu\varphi \\ -\lambda^2\cos\lambda\varphi & -\lambda^2\sin\lambda\varphi & -\mu^2\cos\mu\varphi & -\mu^2\sin\mu\varphi & -\nu^2\cos\nu\varphi & -\nu^2\sin\nu\varphi \\ \lambda^2(1-\lambda^2) & 0 & \mu^2(1-\mu^2) & 0 & \nu^2(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda^2) & 0 & \mu(1-\mu^2) & 0 & \nu(1-\nu^2) \\ 0 & \dfrac{\lambda^3(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2} & 0 & \dfrac{\mu^3(1-\mu^2)}{1+\mu^2} & 0 & \dfrac{\nu^3(1-\nu^2)}{1+\nu^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

Die Auflösung dieser Determinante führt auf folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda \cos\lambda\varphi + a_\mu \cos\mu\varphi + a_\nu \cos\nu\varphi + b\cos\lambda\varphi\cos\mu\varphi\cos\nu\varphi + c_\lambda\cos\lambda\varphi\sin\mu\varphi\sin\nu\varphi + \\ + c_\mu\cos\mu\varphi\sin\nu\varphi\sin\lambda\varphi + c_\nu\cos\nu\varphi\sin\lambda\varphi\sin\mu\varphi = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda &= 2\,A_\mu\,A_\nu\,, \\ a_\mu &= 2\,A_\nu\,A_\lambda\,, \\ a_\nu &= 2\,A_\lambda\,A_\mu\,, \end{aligned}\right| \quad b = A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2\,, \quad \left|\begin{aligned} c_\lambda &= -A_\mu\,A_\nu\left(\frac{\nu}{\mu}\,\frac{1-\nu^2}{1-\mu^2} + \frac{\mu}{\nu}\,\frac{1-\mu^2}{1-\nu^2}\right), \\ c_\mu &= -A_\nu\,A_\lambda\left(\frac{\lambda}{\nu}\,\frac{1-\lambda^2}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{\lambda}\,\frac{1-\nu^2}{1-\lambda^2}\right), \\ c_\nu &= -A_\lambda\,A_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}\,\frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1-\lambda^2}{1-\mu^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned} A_\lambda &= (\nu^2-\mu^2)\,\lambda^2\,(1-\lambda^2)\,, \\ A_\mu &= (\lambda^2-\nu^2)\,\mu^2\,(1-\mu^2)\,, \\ A_\nu &= (\mu^2-\lambda^2)\,\nu^2\,(1-\nu^2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

b) Lösungsbereich II: $0{,}11340 \leqq k \leq 17{,}6366$. Im zweiten Lösungsbereich sind n_2^2 und n_3^2 konjugiert komplex. Daher werden auch μ und ν konjugiert komplex, und wir setzen

$$\begin{aligned} \mu^2 &= A + iB\,, \qquad \mu = \alpha + i\beta\,, \\ \nu^2 &= A - iB\,, \qquad \nu = \alpha - i\beta\,. \end{aligned}$$

Die Frequenzgleichung (21) geht damit über in

$$\left.\begin{aligned} &a_1\cos\alpha\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\varphi + a_2\sin\alpha\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\varphi + \\ &+ b_0\cos\lambda\varphi + b_1\cos\lambda\varphi\cos^2\alpha\varphi + b_2\cos\lambda\varphi\,\mathfrak{Cof}^2\,\beta\varphi + \\ &+ c_1\sin\lambda\varphi\cos\alpha\varphi\sin\alpha\varphi + c_2\sin\lambda\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\varphi = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= -4\,\overline{A}_\lambda\,A_1\,, \qquad a_2 = 4\,\overline{A}_\lambda\,A_2\,, \\ b_0 &= \overline{A}_\lambda^2 - 4\,A_2^2\,, \quad b_{1,2} = -\left[\overline{A}_\lambda^2 + 2(A_1^2 - A_2^2)\right] \pm 2\,(A_1^2 + A_2^2)\,k\,\frac{1+A}{N}\,, \\ c_1 &= \Re\left\{-\frac{4\,B\lambda k}{N}\,(A_1 - iA_2)\,(2 + \lambda^2 + A - iB)\,\mu\,(1-\mu^2)\right\}, \\ c_2 &= \Im\left\{-\frac{4\,B\lambda k}{N}\,(A_1 - iA_2)\,(2 + \lambda^2 + A - iB)\,\mu\,(1-\mu^2)\right\}; \end{aligned}$$

$\Re$ und $\Im$ kennzeichnen hier Real- und Imaginärteil des Klammerausdruckes. Ferner ist

$$\begin{aligned} A_\lambda &= 2\,B\lambda^2(\lambda^2-1)\,, \\ A_1 &= B\,[A^2 + B^2 - A + \lambda^2\,(1-A)]\,, \\ A_2 &= (1-A)\,(A^2 + B^2 - A\lambda^2) - B^2\lambda^2\,, \\ N &= (\alpha^2 + \beta^2)\,[(1-A)^2 + B^2]\,. \end{aligned}$$

c) Lösungsbereich III: $17{,}6366 \leqq k < \infty$. Im Lösungsbereich III sind n_2^2 und n_3^2 positiv, und wir setzen daher

$$\mu = i\,\overline{\mu}\,, \quad \nu = i\,\overline{\nu}\,.$$

Die Frequenzgleichung (21) geht in leicht ersichtlicher Weise über in

$$\left.\begin{aligned} &\overline{a}_\lambda\cos\lambda\varphi + \overline{a}_\mu\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\mu}\varphi + \overline{a}_\nu\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\nu}\varphi + \overline{b}\cos\lambda\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\mu}\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\nu}\varphi + \\ &+ \overline{c}_\lambda\cos\lambda\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\mu}\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\nu}\varphi + \overline{c}_\mu\sin\lambda\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\mu}\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\nu}\varphi + \overline{c}_\nu\sin\lambda\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\mu}\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\nu}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_\lambda &= 2\,\overline{A}_\mu\,\overline{A}_\nu\,, \\ \overline{a}_\mu &= 2\,\overline{A}_\nu\,\overline{A}_\lambda\,, \\ \overline{a}_\nu &= 2\,\overline{A}_\lambda\,\overline{A}_\mu\,, \end{aligned}\right| \quad \overline{b} = \overline{A}_\lambda^2 + \overline{A}_\mu^2 + \overline{A}_\nu^2\,, \quad \left|\begin{aligned} \overline{c}_\lambda &= -\overline{A}_\mu\,\overline{A}_\nu\left[\frac{\overline{\nu}}{\overline{\mu}}\,\frac{1+\overline{\nu}^2}{1+\overline{\mu}^2} + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\nu}}\,\frac{1+\overline{\mu}^2}{1+\overline{\nu}^2}\right], \\ \overline{c}_\mu &= -\overline{A}_\nu\,\overline{A}_\lambda\left[\frac{\lambda}{\overline{\nu}}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\overline{\nu}^2} - \frac{\overline{\nu}}{\lambda}\,\frac{1+\overline{\nu}^2}{1-\lambda^2}\right], \\ \overline{c}_\nu &= -\overline{A}_\lambda\,\overline{A}_\mu\left[-\frac{\overline{\mu}}{\lambda}\,\frac{1+\overline{\mu}^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{\overline{\mu}}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\overline{\mu}^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_\lambda &= -(\overline{\nu}^2 - \overline{\mu}^2)\,\lambda^2\,(1-\lambda^2)\,, \\ \overline{A}_\mu &= -(\lambda^2 + \overline{\nu}^2)\,\overline{\mu}^2\,(1+\overline{\mu}^2)\,, \\ \overline{A}_\nu &= +(\overline{\mu}^2 + \lambda^2)\,\overline{\nu}^2\,(1+\overline{\nu}^2)\,. \end{aligned}$$

Tabelle 3. *Wurzeln der Frequenzgleichung.*

k	φ_0	β_0	φ_1	β_1	φ_2	β_2
0,025	551°	3,83				
0,05	301,7°	2,490	474°	3,91	564°	4,66
0,075	247,9°	2,265	390°	3,57	520°	4,75
0,10	223,3°	2,184				
0,1125	213,0°	2,156	348°	3,52	477°	4,83
0,15	193,14°	2,098	323°	3,51	454°	4,94
0,30	156,28°	2,020	268,5°	3,47	401,2²	5,19
0,667	124,17°	1,956				
3	83,30°	1,913	163,1°	3,75	266,2°	6,12
7,2	66,45°	1,901	136,5°	3,91	226,0°	6,46
21,43	50,50°	1,890	104,0°	4,09	181,6°	6,83
211,77	28,23°	1,881	66,00°	4,390	110,5°	7,35
1000	19,15°	1,879	46,25°	4,545	77,14°	7,58
3000	14,54°	1,876	35,66°	6,610	59,23°	7,66
∞	0	1,875	0	4,694	0	7,855

k	φ_3	β_3	φ_4	β_4	φ_5	β_5
0,05	1073°	8,86				
0,075	816°	7,46				
0,10	674°	6,62	870°	8,55	987°	9,70
0,1125	652°	6,60	826°	8,37	958°	9,69
0,15	612°	6,25	759°	8,24	906°	9,85
0,30	539°	6,97	677°	8,76	816°	10,55
3	370,0°	8,50	474°	10,89	578°	13,27
7,2	315,7°	9,03	405,7°	11,60	496°	14,18
21,43	255,0°	9,59	328,5°	12,35	402°	15,11
211,77	155,5°	10,34	200,5°	13,35	245,5°	16,34
1000	108,4°	10,65	139,7°	13,72	171,0°	16,80
3000	83,23°	10,17	107,2	13,86	131,2°	16,95
∞	0	10,996	0	14,137	0	17,279

In den Grenzfällen $k \longrightarrow 0$ und $k \longrightarrow \infty$ nimmt die Frequenzgleichung eine besonders einfache Form an, nämlich für

$$k \longrightarrow 0 : \quad \cos \sqrt{k}\, \varphi \left[1 + \cos \sqrt{2\,k}\, \varphi\right] = 0 , \tag{26}$$

$$k \longrightarrow \infty : \quad 1 + \cos \sqrt[4]{k}\, \varphi \, \mathfrak{Cof} \sqrt[4]{k}\, \varphi \quad = 0 . \tag{27}$$

Die letzte Formel stimmt aber überein mit der Frequenzgleichung für den einseitig eingespannten geraden Stab.

Für die praktische Durchführung der Rechnung hat es sich als zweckmäßig erwiesen, von gegebenen Werten von k auszugehen. Damit sind auch die Wurzeln λ, μ, ν usw. gegeben. Je nach dem Lösungsbereich werden dann aus der Frequenzgleichung die zugehörigen Windungswinkel φ durch schrittweise Annäherung errechnet. Tabelle 3 enthält die Rechenergebnisse für die Grundfrequenz und die ersten fünf Oberschwingungen. Es empfiehlt sich, die Eigenfrequenz durch folgende Formel anzugeben:

$$\omega_j^2 = \frac{\beta_j^4}{l^4} \, \frac{EJ}{\varrho F} . \tag{28}$$

Hierbei ist $l = r\varphi$ die abgewickelte Federlänge, $\varrho F l$ die Gesamtmasse der Feder. Zwischen β_j und k besteht die Beziehung

$$\beta_j = \varphi \sqrt[4]{k} . \tag{29}$$

In Tabelle 3 sind daher auch die Größen β_j angegeben. In Abb. 4 ist β_j über dem Windungswinkel aufgetragen. Die Werte über $\varphi = 360°$ sind praktisch nicht zu verwirklichen, wenn man sie nicht näherungsweise gewendelten oder spiralförmigen Federn zuordnen will. Die Grenzen der Lösungsbereiche erscheinen wegen (29) mit k = konst. als unter 45° geneigte gerade Linien.

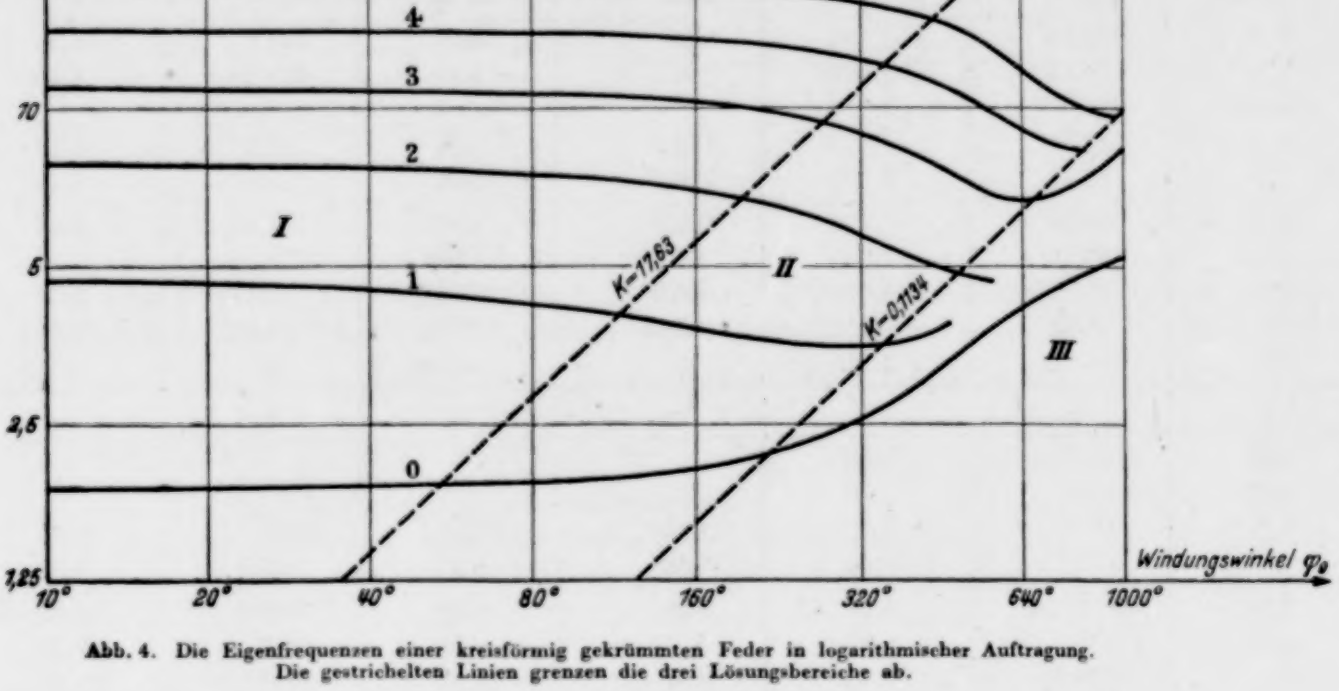


Abb. 4. Die Eigenfrequenzen einer kreisförmig gekrümmten Feder in logarithmischer Auftragung. Die gestrichelten Linien grenzen die drei Lösungsbereiche ab.

(Eingegangen am 7. August 1948.)
Anschrift des Verfassers: Dr. *Walter Wuest*, (20b) Göttingen, Zeppelinstraße 7.

Zur Berechnung des Profilwiderstands.

Von H. B. Helmbold.

1. Grundlagen. Den Profilwiderstand umströmter Körper kann man auf Grund der Ergebnisse der Grenzschichtforschung einigermaßen zutreffend vorausberechnen, falls es sich um schlanke zylindrische Körper in der stationären, ebenen (oder auch zylindrischen), inkompressiblen Strömung bei hohen *Reynolds*zahlen handelt, wobei die Strömung überall an der Körperoberfläche entlang strömen („anliegen") soll, wenn nur die Geschwindigkeitsverteilung längs der Kontur und die Umschlagstellen der Grenzschicht bekannt sind[1]. Im allgemeinen genügt es, der Berechnung die theoretische Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung um den gegebenen Körper zugrunde zu legen; der wirkliche Geschwindigkeitsverlauf weicht zwar vom theoretischen am hinteren Körperende dadurch merklich ab, daß sich zwischen Körper und Potentialströmung die durch Reibung gebremste Grenzschicht zwischenschiebt; wir werden aber die Berechnung so einrichten, daß wir die Abweichung von der Theorie nicht weiter zu berücksichtigen brauchen.

Im wesentlichen besteht die Abweichung darin, daß sich die Potentialströmung am Körperheck nicht mehr schließt, so daß ihre Geschwindigkeit dort nicht auf Null fällt, sondern einen endlichen Betrag U_H behält. Dem entsprechen nach der *Bernoulli*schen Gleichung geringere statische Drücke am Körperheck als in der reinen Potentialströmung, für welche seit *D'Alembert* bekannt ist, daß der Widerstand eines umströmten Körpers Null ist; wir erhalten vielmehr als sekundäre Wirkung der Flüssigkeitsreibung einen Druckwiderstand neben der Oberflächenreibung, welche von den durch Reibung unmittelbar verursachten Schubspannungen herrührt. Für die Berechnung ist es jedoch unnötig, den Profilwiderstand in Oberflächenreibung und Druckwiderstand zu zerlegen, wenn wir nur den Strömungszustand in großer Entfernung vom Körper betrachten. Dieser ist dadurch bestimmt, daß sich die Potentialströmung auch hinter dem Körper nicht mehr schließt, weil die von der Grenzschicht erfaßten Flüssigkeitsteile als Nachlauf (Kielwasser, Wirbelschleppe) dem Körper nacheilen. Das aus dem umströmten Körper, der Grenzschicht und dem Nachlauf bestehende Ganze kann hinsichtlich seiner Fernwirkung als ein sog. Halbkörper (halbunendlich langer Körper) oder auch als ein System von Quellen angesehen werden. Die Dicke des Halbkörpers im Unendlichen wird als die Verdrängungsdicke des Nachlaufs bezeichnet und ergibt sich aus der Kontinuitätsbedingung als

$$\delta^*_\infty = \frac{1}{U_\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\infty - u_\infty)\, dy$$

(U_∞ ungestörte Geschwindigkeit im Unendlichen, $u_\infty(y)$ Geschwindigkeit im Nachlauf weit hinter dem Körper, y Koordinate senkrecht zu U_∞).

Um den Widerstand nach dem Impulssatz zu berechnen, umgeben wir den Körper mit einer Kontrollfläche, die überall in sehr großer Entfernung vom Körper verläuft; ihre Seitenflächen sollen aus Stromlinien gebildet werden, und die Abschlußflächen sollen stromaufwärts und stromabwärts gleich weit vom Körper entfernt sein und senkrecht zu den Stromlinien verlaufen. Die Abschlußflächen unterscheiden sich nur um die endliche Fläche $\delta^*_\infty z$, wenn z die Länge des Körpers senkrecht zur Strömungsebene ist; ebenso groß ist die Projektion der Seitenflächen in Richtung von U_∞. Die mit dem Halbkörper gleichwertige Quelle verursacht auf diesen endlichen Flächen Druckunterschiede, die mit zunehmender Entfernung r der Kontrollfläche vom Körper mindestens wie $1/r$ verschwinden. Die übrigen Teile der Abschlußflächen ergeben schon aus Symmetriegründen die Druckresultierende Null. Demnach ist die in Richtung von U_∞ fallende Komponente des Druckintegrals auf der gesamten Kontrollfläche gleich Null (*L. Prandtl*). Es bleibt als einziger Beitrag zum Widerstand der Impulsstrom des Nachlaufs durch die Kontrollfläche F hindurch zu berücksichtigen, und somit ist der Profilwiderstand des Körpers

$$W_P = \int_\infty \varrho u_\infty (U_\infty - u_\infty)\, dF \equiv \varrho U_\infty^2\, z\, \Sigma\, \vartheta_\infty . \qquad (1)$$

Durch die zweite Schreibweise der rechten Seite haben wir eine weitere charakteristische Dicke des Nachlaufs, seine „Impulsdicke" definiert und $\Sigma\vartheta_\infty$ geschrieben, weil diese Größe

[1] *J. Pretzsch*, Jb. 1938 der Dt. Luftf.-Forschg., S. 160.

sich aus den „Impulsverlustdicken" der Grenzschichten von Ober- und Unterseite des umströmten Zylinders entwickelt (Σ Summenzeichen). Wir sehen uns also für die Widerstandsberechnung auf die Berechnung der Impulsverlustdicken der Grenzschicht verwiesen. Diese beginnt am Körpervorderteil als laminare (glatt strömende) Grenzschicht, schlägt an der Umschlagstelle in den turbulenten Zustand (Mischbewegung) um und setzt sich hinter dem Körper als Nachlauf fort. Die Entwicklung der Impulsverlustdicke muß von der Rechnung durch diese drei physikalisch verschieden bedingten Zustände hindurch verfolgt werden.

Hierfür wählen wir folgende Bezeichnungen: ϱ für die Dichte der Flüssigkeit, μ für ihre Zähigkeit, $\nu \equiv \mu/\varrho$ für ihre kinematische Zähigkeit, x für die Wegkoordinate oder Entfernung eines Konturpunktes vom Spaltungspunkt (vorderer Staupunkt) der Strömung, längs der Kontur gemessen, y für den Wandabstand eines Punktes, von der Kontur senkrecht nach außen gemessen, z für die Länge des zylindrischen Körpers senkrecht zur Strömungsebene und L für die größte Länge im Profil des umströmten Zylinders; dabei bleibt y in der Grenzschicht immer klein gegen L. Ferner bezeichnen wir mit $U(x)$ die Geschwindigkeit an der Grenze zwischen Grenzschicht und Potentialströmung, mit $u(x,y) < U(x)$ die Geschwindigkeit in der Grenzschicht. Für $y=\delta$ wird $u=U$, also ist δ die Grenzschichtdicke. Die Grenzschicht beansprucht für die in ihr strömende, durch Reibung verlangsamte Flüssigkeit einen breiteren Querschnitt und drängt die Potentialströmung um einen entsprechenden Betrag, die Verdrängungsdicke

$$\delta^*(x) \equiv \frac{1}{U} \int_0^h (U-u)\,dy\,,$$

von der Wand ab; dabei ist $h < \delta$ eine konstante Länge, aber noch klein gegen L.

Das für uns wichtigste Dickenmaß aber ergibt sich, wenn der Impulsverlust der Grenzschicht gegenüber der reinen Potentialströmung

$$J_x = z \int_0^h \varrho u(U-u)\,dy \equiv z\varrho U^2 \vartheta$$

gesetzt wird: die Impulsverlustdicke

$$\vartheta(x) \equiv \frac{1}{U^2} \int_0^h u(U-u)\,dy\,.$$

Wird noch die Geschwindigkeit in Richtung der äußeren Wandnormale y mit v und die Schubspannung mit τ bezeichnet, dann lauten die *Prandtl*schen Grenzschichtgleichungen des stationären ebenen Problems bei hinreichend schwacher und stetiger Wandkrümmung

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \varrho U\frac{dU}{dx} = \frac{\partial \tau}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,.$$

Die erste von ihnen enthält links zuerst die Trägheitsglieder, dann das Druckglied $dp/dx = -\varrho U\,dU/dx$, welches der Grenzschicht von der Potentialströmung aufgeprägt wird, und rechts das Reibungsglied; die zweite ist die Kontinuitätsbedingung. Durch Integration dieses Gleichungssystems von $y=0$ bis $y=h$ erhält man eine der *Karman*schen Impulsgleichung gleichbedeutende Integralbedingung[1]

$$\varrho U\frac{dU}{dx}(\delta^* + 2\vartheta) + \varrho U^2\frac{d\vartheta}{dx} = \tau_0\,, \tag{2}$$

worin $\tau_0(x)$ die Wandschubspannung bezeichnet. Diese Gleichung ist die allen folgenden Berechnungen von Impulsverlustdicken gemeinsame Grundlage.

Benötigt wird schließlich noch ein Formparameter, der die Gestalt der vorkommenden Grenzschichtprofile (Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht längs Querschnitten $x=\text{const}$) kennzeichnen soll; der meist verwendete Formparameter ist die Verhältniszahl $H \equiv \delta^*/\vartheta$. Die Gestalt des Grenzschichtprofils selbst wird durch die Funktion $u/U = f(y/\vartheta)$ beschrieben.

Nunmehr können wir zu den Einzelberechnungen übergehen.

---

[1] *E. Gruschwitz*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 321.

2. Die laminare Grenzschicht. In der laminaren Grenzschicht ist die Schubspannung $\tau=\mu\, du/dy$. An der Wand ($y=0$) verschwinden u und v wegen der Haftbedingung, und die erste Grenzschichtgleichung vereinfacht sich dort zu

$$\varrho U \frac{dU}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = 0$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{\vartheta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} + \left(\frac{\partial^2 u/U}{(\partial y/\vartheta)^2}\right)_0 = 0\,.$$

Diese Form der Wandbedingung zeigt, daß

$$\lambda(x) \equiv \frac{\vartheta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \equiv \frac{U\vartheta^2}{\nu}\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

ein Formparameter des laminaren Grenzschichtprofils ist. Wenn wir nun annehmen dürfen, daß das laminare Grenzschichtprofil bereits durch einen einzigen Formparameter eindeutig gekennzeichnet ist, dann besteht auch zwischen H und λ sowie allen übrigen Formparametern ein eindeutiger Zusammenhang. Nun kennt man für gewisse spezielle Geschwindigkeitsverteilungen längs der Kontur, nämlich $U(x)=a+bx$ und $U(x)=mx^n$, die exakten Lösungen der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichungen (*Howarth* und *Hartree*), und der Vergleich dieser Lösungen zeigt in der Tat, daß die erwähnte Annahme bei beschleunigter Grenzschicht ($\lambda>0$) sehr genau zutrifft. Unter diesen günstigen Umständen erscheint es dann auch zulässig, im Einzelfalle auf die exakte Lösung der Grenzschichtgleichungen zu verzichten und die der Gleichung (2) entsprechenden Integralaussagen der vorliegenden speziellen Lösungen zu verallgemeinern.

Setzen wir demgemäß für die Wandschubspannung der laminaren Grenzschicht $\tau_0=\mu(\partial u/\partial y)_0$ in die Integralbedingung (2) ein, so erhalten wir nach einfachen Umformungen die Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht[1]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U\vartheta^2}{\nu}\right) = 2\frac{\vartheta}{U}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 - \left(3+2\frac{\delta^*}{\vartheta}\right)\frac{\vartheta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}\,. \tag{3}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält aber ausschließlich Formparameter der Grenzschichtprofile, denn außer $\frac{\vartheta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}=\lambda$ ist auch $\left(\frac{\partial u/U}{\partial y/\vartheta}\right)_0$ ein solcher. Auf Grund der obigen Annahme über die Einparametrigkeit der laminaren Grenzschichtprofile ist also die rechte Seite der Gleichung (3) eine Funktion von λ allein. Beschränken wir uns demnach zunächst auf den Fall großer *Reynolds*zahlen $\Re \equiv U_\infty L/\nu$ (L=Länge des Profiles) von der Größenordnung 10^7, wo die Umschlagstelle x_u in der Nähe des Geschwindigkeitsmaximums x_m liegt, so daß die laminare Grenzschicht vom Staupunkt bis zur Umschlagstelle durchweg beschleunigt ist ($\lambda>0$), dann ist die zugrundeliegende Annahme erfüllt und die exakte Form der rechten Seite von (2) kann nach einer Untersuchung von *A. Walz*[1] in guter Näherung ein für allemal durch eine lineare Funktion $\alpha-\beta\lambda$ mit den Konstanten $\alpha=0{,}441$ und $\beta\approx 4{,}16$ ersetzt werden. Der Konstantenwert $\alpha=0{,}441$ ist aus der *Blasius*schen Grenzschichtberechnung für die ebene Platte mit konstanter Potentialgeschwindigkeit ($\lambda=0$) bekannt, den Konstantenwert β hat *A. Walz* mit 4,165 angegeben, doch sind dabei die letzten Dezimalen bereits unsicher. Man hat dann statt (3) die lineare Differentialgleichung[1]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U\vartheta^2}{\nu}\right) = \alpha - \beta\frac{U\vartheta^2}{\nu}\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} \tag{3a}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\frac{U\vartheta^2}{\nu} = \frac{\alpha}{U\beta}\left(\int U^\beta\, dx + C\right), \tag{4}$$

und mit $C=0$ ergibt sich die Impulsverlustdicke am Ende des Laminarteils der Grenzschicht

$$\vartheta_u = \sqrt{\frac{\alpha\nu}{U_u^{\beta+1}}\int_0^{x_u} U^\beta\, dx}\,, \tag{5}$$

wenn U_u die Potentialgeschwindigkeit an der Umschlagstelle bedeutet.

[1] *H. Holstein-T. Bohlen*, Ber. S 10 der Lilienthal-Ges. f. Luftf.-Forschg; *A. Walz*, Ber. 141 der Lilienthal-Ges. f. Luftf.-Forschg.

3. Die turbulente Grenzschicht. Die turbulente Grenzschicht, welche nach einer kurzen, in der Rechnung zu vernachlässigenden Übergangsstrecke an die laminare Grenzschicht anschließt, wird ebenfalls mittels (2) berechnet; doch sind die Zusammenhänge zwischen Wandschubspannung, Druckanstieg (Verzögerung) und Grenzschichtprofil noch nicht genau genug erforscht, so daß sich nur grob orientierende Angaben machen lassen.*) Wir führen deshalb die Wandschubspannung $\tau_0(x) = c_{ft}\,\varrho\,U^2/2$ mit einer mittleren Reibungszahl $\overline{c}_{ft}$, die wir anschließend noch abschätzen wollen, und den Formparameter $H(x)$ mit einem entsprechenden Mittelwert $\overline{H}$ in (2) ein und erhalten dann als vereinfachte Differentialgleichung der turbulenten Grenzschicht

$$\frac{d\vartheta}{dx} + (2+\overline{H})\,\frac{\vartheta}{U}\,\frac{dU}{dx} \approx \frac{\overline{c}_{ft}}{2} \tag{6}$$

und daraus durch Integration von der Umschlagstelle bis zur Hinterkante des umströmten Körpers die Impulsverlustdicke am Körperheck[1]

$$\vartheta_H \approx \left(\frac{U_u}{U_H}\right)^{2+\overline{H}} \left(\vartheta_u + \frac{\overline{c}_{ft}}{2} \int_{x_u}^{x_H} \left(\frac{U}{U_u}\right)^{2+\overline{H}} dx\right). \tag{7}$$

Hier ist U_H die Potentialgeschwindigkeit an der Hinterkante, welche, wie eingangs bereits bemerkt, in der wirklichen Strömung einen endlichen positiven Wert besitzt. Wenn man trotzdem bei der Berechnung des Integralausdrucks die theoretische Geschwindigkeitsverteilung einer reibungslosen Körperumströmung zugrunde legt, so begeht man keinen schwerwiegenden Fehler, da sich der Unterschied zwischen dem wirklichen und dem angenommenen Verlauf von $U(x)$ auf einen kleinen Bereich nahe der Hinterkante beschränkt. Den Wert von ϑ_u übernimmt man aus (5).

Der Mittelwert $\overline{H}$ des Formparameters der turbulenten Grenzschicht am umströmten zylindrischen Körper hängt über $\overline{c}_{ft}$ indirekt noch von der *Reynolds*zahl ab; nach den bisherigen Erfahrungen[2] ergaben sich die Wertepaare $\overline{c}_{ft}=0{,}0040$; $\overline{H}=1{,}5$ und $\overline{c}_{ft}=0{,}0034$; $\overline{H}=1{,}4$.

Um nun den noch fehlenden Mittelwert $\overline{c}_{ft}$ der Reibungszahl im Turbulenzteil der Grenzschicht am umströmten zylindrischen Körper, der sich aus den bereits genannten Gründen nicht exakt bestimmen läßt, in möglichst guter Annäherung abzuschätzen, ersetzen wir ihn durch den Mittelwert der Reibungszahl im Turbulenzteil der Grenzschicht an der glatten ebenen Platte, die in ihrer Ebene angeströmt wird; die *Reynolds*zahl und die Lage der Umschlagstelle an der Platte sollen dabei dieselben Werte wie am umströmten Zylinder haben.

Die Potentialgeschwindigkeit ist längs der ganzen Platte $U=\text{konst.}=U_\infty$, und $\Re \equiv U_\infty L/\nu$ ist die *Reynolds*zahl der Platte von der Gesamtlänge L. Bekannt sind die Formeln für die mittlere Reibungszahl der Laminarstrecke von der Länge $x_u \equiv \xi_u \cdot L$ und der *Reynolds*zahl $R_u \equiv U_\infty x_u/\nu \equiv \xi_u \Re$

$$c_{fu} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\Re_u}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\Re_u}} \qquad \text{nach } \textit{Blasius}$$

und für die mittlere Reibungszahl bei vollturbulenter Grenzschicht (Turbulenz von der Vorder- bis zur Hinterkante)

$$c_{ft}(\Re) = \frac{0{,}427}{(\log \Re + 0{,}407)^{2{,}64}} \qquad \text{nach } \textit{Schultz-Grunow}.$$

Um hieraus die benötigte mittlere Reibungszahl im Turbulenzteil der Grenzschicht hinter einer laminaren Anfangsstrecke zu berechnen, denken wir uns das Plattenvorderteil bis zur Umschlagstelle durch ein kürzeres Plattenvorderteil mit turbulenter Grenzschicht ersetzt, das denselben Widerstand hat und deshalb überall dahinter den gleichen Beitrag zur Impulsverlustdicke ergibt[3]. Mit $\Re_{to}$ bezeichnen wir die *Reynolds*zahl des turbulenten Ersatzstückes allein und mit $\Re_t$ die *Reynolds*zahl der Platte mit dem turbulenten Ersatzstück. Dann ist wegen der verlangten Widerstandsgleichheit von Ersatzstück und Laminarteil

$$\Re_{to}\, c_{ft}\,(\Re_{to}) = \Re_u\, c_{fu}\,,$$

*) (Zusatz bei der Korrektur:) Einen neuen Fortschritt hierin bringt die Untersuchung von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 288.

[1] *A. Buri*, Diss. Eidg. Techn. Hochsch. Zürich 1931.

[2] *E. Gruschwitz*, siehe Fußnote von S. 274 sowie *H. Peters*, Journ. of Aer. Sciences 1935, S. 7.

[3] *L. Prandtl* in *W. F. Durand*, Aerodyn. Theory, Bd. 3. Im Ergebnis etwas abweichend.

woraus $\Re_{to}$ zu bestimmen ist; damit wird

$$\Re_t = \Re - \Re_u + \Re_{to} = \Re(1-\xi_u) + \Re_{to}\,.$$

Weiter folgt aus der Widerstandsgleichheit der Platte mit laminarer Anfangsstrecke und der Platte mit Ersatzstück die Beziehung

$$\Re\, c_f = \Re_t\, c_{ft}\,(\Re_t)\,,$$

welche zur Ermittlung der mittleren Reibungszahl c_f der Platte mit laminarer Anfangsstrecke dient. Der gesuchte Mittelwert $\overline{c}_{ft}$ des Turbulenzteils der Grenzschicht an der Platte mit laminarer Anfangsstrecke folgt dann aus

$$c_f = \xi_u\, c_{fu} + (1-\xi_u)\,\overline{c}_{ft};$$

er ist in Zahlentafel 1 tabuliert.

Zahlentafel 1.

$\Re$	$10^3\,\overline{c}_{ft}$									
	$\xi_u = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$1 \cdot 10^6$	4,55	4,31	4,31	4,34	4,38	4,44	4,52	4,62	4,74	5,10
2	3,95	3,80	3,81	3,85	3,89	3,96	4,03	4,13	4,25	4,50
5	3,34	3,26	3,27	3,31	3,37	3,43	3,50	3,57	3,66	3,80
$1 \cdot 10^7$	2,96	2,91	2,92	2,96	3,01	3,07	3,15	3,23	3,31	3,41
2	2,61	2,59	2,61	2,64	2,69	2,74	2,82	2,90	3,00	3,11
5	2,24	2,24	2,26	2,29	2,33	2,38	2,44	2,53	2,63	2,73
$1 \cdot 10_8$	2,02	2,02	2,04	2,07	2,11	2,16	2,22	2,30	2,39	2,50

4. Der Nachlauf hinter dem Körper. Die Grenzschicht setzt sich hinter dem umströmten Körper als Nachlauf fort. Auch hier ist die Gleichung (2) zugrunde zu legen. Mit dem Fortfall der begrenzenden Wand verschwindet die Wandschubspannung ($\tau_0 = 0$) und (2) geht in die Differentialgleichung des Nachlaufs über:

$$\frac{d\,\vartheta}{\vartheta} = -(2+H)\,\frac{d\,U}{U}\,. \tag{8}$$

Für den Formparameter H des Nachlaufprofils wurde experimentell[1] die Gesetzmäßigkeit

$$H = 1 + \text{konst. ln}\,\frac{U_\infty}{U} \tag{9}$$

gefunden. Diese Gesetzmäßigkeit scheint die früher verwendete Hypothese[2], welche die Umformung des Nachlaufs in Körpernähe als überwiegend von Druckgefälle beherrscht annimmt, während die Vermischungsvorgänge dagegen zurücktreten, im wesentlichen zu bestätigen; nur die unmittelbare Umgebung der Hinterkante dürfte hiervon auszunehmen sein. Weit hinter dem Körper wird die Impulsdicke des Nachlaufs konstant, weil dort die Druckunterschiede mindestens wie $1/r$ auf Null abklingen. Wird nun (9) in (7) eingesetzt, so bekommt man durch Integration von der Hinterkante (U_H) bis ins Unendliche (U_∞) die asymptotische Impulsdicke des Nachlaufs aus der Grenzschicht einer Körperseite

$$\vartheta_\infty = \vartheta_H \left(\frac{U_H}{U_\infty}\right)^{\frac{5+H_H}{2}}. \tag{10}$$

Die gesamte Impulsdicke des Nachlaufs setzt sich aus den Beiträgen der Ober- und Unterseite des zylindrischen Körpers zusammen. Die Potentialgeschwindigkeit U_H ist den beiden am Körperheck zusammenfließenden Grenzschichten gemeinsam. Der Formparameter an der Hinterkante beträgt etwa $H_H = 1{,}8$ bis $2{,}0$, wenn die Grenzschicht dort turbulent ist. Die Werte von ϑ_H sind für beide Körperseiten nach (7) zu berechnen.

---

[1] *Squire-Young*, Aer. Res. Comm.-Rep. and Mem. 1838.

[2] *J. Pretzsch*, siehe Fußnote von S. 273; vgl. auch *H. B. Helmbold*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 275.

5. Der Profilwiderstand. Bis hierher sind die verschiedenen Abschnitte einer Widerstandsberechnung aus älteren Arbeiten im wesentlichen bereits bekannt. Das Ergebnis, das wir gewinnen, indem wir die Teilergebnisse (5), (7), (10) und (1) der Reihe nach in die jeweils nächste Gleichung dieser Folge einsetzen und die übliche dimensionslose Schreibweise $c_{wp} \equiv W_p/\varrho \frac{U_\infty^2}{2} z L$ (Widerstandszahl) anwenden, lautet nun

$$c_{wp} = 2 \frac{\Sigma \vartheta_\infty}{L}$$

oder

$$c_{wp} = 2 \Sigma \left(\frac{U_H}{U_\infty}\right)^{\frac{5+H_H}{2}} \left(\frac{U_u}{U_H}\right)^{2+\bar{H}} \left(\sqrt{\frac{\alpha \nu}{U_u L} \int_0^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_u}\right)^{\beta} d\xi} + \frac{\bar{c}_{fl}}{2} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_u}\right)^{2+\bar{H}} d\xi \right), \qquad (11)$$

worin $\xi \equiv x/L$ ist. Abgesehen davon, daß dies Ergebnis nicht sehr übersichtlich ist, weist es den Nachteil auf, daß noch die Potentialgeschwindigkeit an der Hinterkante U_H darin vorkommt; es ist aber ziemlich schwierig, für diese Größe begründete Annahmen zu machen. Deshalb ist es ein sehr erwünschter Umstand, daß die Exponenten $\frac{1}{2}(5+H_H)$ und $2+\bar{H}$ zahlenmäßig immer so nahe beieinander liegen, daß man sie näherungsweise auch gleichsetzen kann. Dann fällt U_H aus dem Ergebnis überhaupt gänzlich heraus (daß das Ergebnis einer Widerstandsberechnung von der angenommenen Größe der Potentialgeschwindigkeit U_H nahezu unabhängig ist, hatte *A. Walz*, Dt. Luftf.-Forschg., Unt. u. Mitt. 3060, bereits gelegentlich bemerkt). Mit der Annahme

$$\frac{1}{2}(5+H_H) = 2+\bar{H} \qquad (I)$$

und mit dem bekannten Ausdruck für die mittlere Reibungszahl einer glatten ebenen Platte von der Gesamtlänge L bei vollaminarer Grenzschicht

$$c_{fl} = 2 \sqrt{\frac{\alpha \nu}{U_\infty L}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\Re}} \quad \text{nach } \textit{Blasius}$$

ergibt sich also einfach

$$c_{wp} = \Sigma \left(c_{fl} \frac{U_u}{U_\infty} \sqrt{\int_0^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{1+2\bar{H}} \left(\frac{U}{U_u}\right)^{\beta} d\xi} + \bar{c}_{fl} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{2+\bar{H}} d\xi \right). \qquad (12)$$

Dadurch, daß nun auch noch die Exponenten $1+2\,\bar{H}$ und β zahlenmäßig wenig voneinander verschieden sind, ist eine weitere Vereinfachung des Ergebnisses möglich. Mit der Annahme

$$1+2\,\bar{H} = \beta \qquad (II)$$

erhalten wir das Endergebnis

$$c_{wp} = \Sigma \left(c_{fl} \frac{U_u}{U_\infty} \sqrt{\int_0^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{\beta} d\xi} + \bar{c}_{fl} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{2+\bar{H}} d\xi \right). \qquad (13)$$

Die Annahmen (I) und (II) lassen sich durch passende Wahl der an sich nicht sehr genau festliegenden Konstanten und Parameter miteinander in Einklang bringen, indem beispielsweise folgende rechnerisch bequemen Werte gewählt werden:

$$\beta = 4{,}0; \quad \bar{H} = 1{,}5; \quad H_H = 2{,}0. \qquad (III)$$

Dies würde einer mittleren Reibungszahl im Turbulenzteil $\bar{c}_{fl} = 0{,}0040$ und folglich nach Zahlentafel 1 *Reynolds*zahlen $\Re$ von der Größenordnung $2 \cdot 10^6$ entsprechen. Mit dieser Konstantenwahl lautet das Endergebnis

$$c_{wp} = \Sigma \left(c_{fl} \frac{U_u}{U_\infty} \sqrt{\int_0^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{4.0} d\xi} + \bar{c}_{fl} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3{,}5} d\xi \right). \qquad (13a)$$

Der Wert $\xi_H \equiv x_H/L$ ist bei schlanken Körpern unwesentlich größer als Eins. Für eine glatte ebene Platte ohne Anstellwinkel, bei welcher $U = \text{konst.} = U_\infty$ ist, geht (13a) in

$$c_{wp} = \Sigma \left[c_{fl} \sqrt{\xi_u} + \bar{c}_{fl} (\xi_H - \xi_u) \right] = 2 \left[c_{fu}\, \xi_u + \bar{c}_{fl} (1-\xi_u) \right]$$

über, was mit der letzten Gleichung des Abschnittes **3** völlig gleichbedeutend ist. Der Vergleich von (13a) mit der Plattenformel zeigt, wie im allgemeinen Fall des umströmten zylindrischen

Körpers die Widerstandszahl außer von den Reibungszahlen c_f und Umschlagstellen ξ_u auch noch von der Geschwindigkeitsverteilung $U(\xi)/U_\infty$ längs der Kontur und der Geschwindigkeit U_u/U_∞ an der Umschlagstelle abhängt.

Bei mittleren *Reynolds*zahlen $\Re$ von der Größenordnung 10^6 und darunter liegt die Umschlagstelle erfahrungsgemäß in der Nähe der laminaren Ablösestelle, die durch das Kriterium $\lambda \approx -0{,}084$ festgelegt ist; in diesen Fällen führen also die Bedingungen für die Ablösung der laminaren Grenzschicht von der Wand nicht zur Ablösung, sondern zum Umschlag in den turbulenten Strömungszustand, in welchem die von der Außenströmung auf die Grenzschicht durch turbulente Mischbewegung (Impulsaustausch) ausgeübten Scheinschubspannungen stark genug sind, um die energiearme Grenzschicht gegen den Druckanstieg mitzuschleppen und auf diese Weise die Ablösung zu verhindern. Die laminare Grenzschicht durchläuft hier hinter dem Geschwindigkeitsmaximum (x_m) bis zur Umschlagstelle (x_u) noch einen Verzögerungsbereich (Druckanstieg) mit $\lambda < 0$, in welchem zwar die in Abschnitt **2** benutzte Annahme über die Einparametrigkeit der Grenzschichtprofile nicht mehr genau zutrifft, die bestehenden Zusammenhänge aber doch noch wenigstens im Groben angenähert werden können, indem die zweite Konstante der Gleichung (3a) mit $\beta = 5{,}0$ angenommen wird. Man bekommt dann an Stelle von (4) für $x > x_m$

$$\frac{U\vartheta^2}{\nu} = \frac{\alpha}{U^{5,0}}\left(U_{\max}\int_0^{x_m} U^{4,0}\,dx + \int_{x_m}^{x_u} U^{5,0}\,dx\right), \tag{4a}$$

woraus insbesondere für $x = x_u > x_m$ als Ablöse- bzw. Umschlagkriterium zur Bestimmung der Umschlagstelle ξ_u

$$\lambda_u = \frac{\alpha}{U_u}\left(\frac{dU}{d\xi}\right)_u\left(\frac{U_{\max}}{U_u}\int_0^{\xi_m}\left(\frac{U}{U_u}\right)^{4,0}d\xi + \int_{\xi_m}^{\xi_u}\left(\frac{U}{U_u}\right)^{5,0}d\xi\right) \approx -0{,}084 \tag{14}$$

und an Stelle von (6)

$$\frac{\vartheta_u}{L} = \sqrt{\frac{\alpha\nu}{U_u L}\left(\frac{U_{\max}}{U_u}\int_0^{\xi_u}\left(\frac{U}{U_u}\right)^{4,0}d\xi + \int_{\xi_m}^{\xi_u}\left(\frac{U}{U_u}\right)^{5,0}d\xi\right)} \tag{6a}$$

folgt. Dies wird unter Berücksichtigung der Konstantenwahl (III) in die Vorform der Gleichung (11)

$$c_{wp} = 2\,\frac{\Sigma\vartheta_\infty}{L} = 2\Sigma\left(\frac{U_u}{U_\infty}\right)^{3,5}\left(\frac{\vartheta_u}{L} + \frac{\bar{c}_{fl}}{2}\int_{\xi_u}^{\xi_H}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3,5}d\xi\right)$$

eingesetzt und ergibt nach kurzer Zwischenrechnung

$$c_{wp} = \Sigma\left(c_{fl}\sqrt{\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{U_{\max}}{U_\infty}\int_0^{\xi_m}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{4,0}d\xi + \int_{\xi_m}^{\xi}\frac{U}{U_\infty}\right)^{5,0}d\xi\Bigg)} + \bar{c}_{fl}\int_{\xi_u}^{\xi_H}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3,5}d\xi\right). \tag{15}$$

Die in dieser Arbeit gemachten Angaben über die Lage der Umschlagstelle entsprechen dem gegenwärtigen fragmentarischen Stand unserer Kenntnisse über den Turbulenzbeginn. Ihren vollen Nutzen werden unsere neuen Formeln also erst dann bringen können, wenn man hierüber einmal besser unterrichtet sein wird.

6. Zusammenfassung. Durch geeignete Abstimmung der in den Grenzschichtrechnungen auftretenden empirischen und theoretischen Konstanten läßt sich die schlecht abzuschätzende Potentialgeschwindigkeit am Körperheck aus der Widerstandsberechnung gänzlich entfernen und eine sehr übersichtliche Widerstandsformel gewinnen.

(Eingegangen am 11. August 1948.)

Anschrift des Verfassers: Professor *Heinrich Bruno Helmbold*, (13b) München 23, Römerstraße 14 II.

Über den durch einen Verdichtungsstoß verursachten Zusatzauftrieb.

Von H. B. Helmbold.

1. Einleitung. Der Auftrieb eines unter kleinem Anstellwinkel α angeblasenen schlanken zylindrischen Körpers in einer ebenen Unterschallströmung folgt der *Prandtl*schen Regel, wonach bei festgehaltenem Anstellwinkel die Auftriebszahl $c_a \equiv A/q_\infty F$ dem *Prandtl*schen Faktor $\mathfrak{P} \equiv 1/\sqrt{1-\mathfrak{M}_\infty^2}$ proportional ist:

$$c_a = \mathfrak{P}\alpha\,[2\,\pi - \delta\, f(\mathfrak{R})]\,. \tag{1}$$

Die Bedeutung der Formelzeichen ist folgende: A Auftrieb, $q_\infty \equiv \varrho_\infty U^2/2$ Staudruck mit ϱ_∞ als ungestörter Dichte und U als Anblasgeschwindigkeit, F größte Projektionsfläche des zylindrischen Körpers, $\mathfrak{M}_\infty \equiv U/a_\infty$ Machzahl mit a_∞ als ungestörter Schallgeschwindigkeit, $\delta \equiv d/L$ Dickenverhältnis mit d als größter Dicke und L als größter Länge im Profil des zylindrischen Körpers, $\mathfrak{R} \equiv U\,L/\nu$ *Reynolds*zahl mit ν als kinematischer Zähigkeit.

Bei hinreichend großer *Reynolds*zahl verschwindet die Abhängigkeit von derselben, also wird $f(\mathfrak{R}) = \text{konst}$. Zum Bau der experimentell[1] gesicherten Gleichung (1) ist von seiten der Theorie zu bemerken, daß in der kompressiblen Potentialströmung die Auftriebszahl c_a mit der Machzahl $\mathfrak{M}_\infty$ zunehmend stärker als proportional $\mathfrak{P}$ wächst, doch besteht daneben in der wirklichen Strömung infolge der inneren Reibung ein den Auftrieb schwächender Grenzschichteinfluß, welcher seinerseits der *Prandtl*schen Regel gehorcht und den Überschuß der theoretischen Auftriebszahl über $2\,\pi\alpha$ hinaus sogar überwiegt; so kommt eine zufällig fast lineare Beziehung nach (1) zustande[2].

Die der Gleichung (1) zugrundeliegende *Prandtl*sche Regel setzt außer fast paralleler Strömung (schlankes Profil bei kleinem Anstellwinkel) streng genommen noch voraus, daß die Strömung reine (unterkritische) Unterschallströmung ist, daß also die Strömungsgeschwindigkeit nirgends die kritische Schallgeschwindigkeit erreicht oder überschreitet. Diejenige Machzahl $\mathfrak{M}_\infty$, bei der gerade in (mindestens) einem Punkte der Strömung die kritische Schallgeschwindigkeit erreicht ist, heißt die kritische Machzahl $\mathfrak{M}_{kr}$. Es wäre demnach zu erwarten, daß die Abhängigkeit der Auftriebszahl von der Machzahl nach (1) oberhalb $\mathfrak{M}_{kr}$ ihre Gültigkeit verliert. Die Experimente zeigen jedoch einwandfrei, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist: bei größeren Anstellwinkeln wurden an dünnen symmetrischen Profilen mit 40—42 % Dickenrücklage beträchtliche Überschreitungen der kritischen Machzahl (um 56 % bei $\delta = 0{,}0875$ und $\alpha = 4°$ nach *H. B. Helmbold*, um 47 % bei $\delta = 0{,}10$ und $\alpha = 6°$ nach *O. Knappe*, um 40 % bei $\delta = 0{,}12$ und $\alpha = 7°$ nach *B. Göthert*) ohne Abweichung der Auftriebszahl von der linearen Gesetzmäßigkeit nach (1) beobachtet. Nur bei kleinen Anstellwinkeln erfolgt eine Änderung im Auftriebsverhalten sofort oder kurz nach Überschreiten der kritischen Machzahl. Diejenige Machzahl, von der ab die Auftriebszahl nicht mehr der Gleichung (1) gehorcht, wollen wir $\mathfrak{M}_{AI}$ nennen. Die Änderung im Auftriebsverhalten bei Überschreiten von $\mathfrak{M}_{AI}$ besteht im plötzlichen Auftreten eines Zusatzauftriebs zum Auftrieb nach (1), der etwa der empirischen Gesetzmäßigkeit $\Delta c_a \infty (\mathfrak{M}_\infty - \mathfrak{M}_{AI})^2$ gehorcht. Nicht unerwähnt darf bleiben, daß der Zusatzauftrieb seiner Größe nach außer vom Dickenverhältnis δ sehr stark durch die Nachbarschaft fester Wände oder freier Strahlgrenzen beeinflußt wird; er ist unter üblichen Verhältnissen im Kanal mit festen Wänden mehrfach (Größenordnung: zehnmal) größer als im Freistrahl. Das plötzliche Auftreten des Zusatzauftriebs nach unter Umständen beträchtlichem Überschreiten der kritischen Machzahl wurde sofort mit dem gleichzeitigen Auftreten eines Verdichtungsstoßes in Verbindung gebracht, die Machzahl $\mathfrak{M}_{AI}$ mithin als „Stoßmachzahl" ($\mathfrak{M}_{St}$) gedeutet. Der experimentelle Beweis konnte in schlüssiger Form jedoch erst 1945[3] durch die Auswertung der im *FIAT*-Report mitveröffentlichten *Göthert*schen Versuche erbracht werden. Hier soll nun der Beweis für den aus den Versuchen zunächst nur erschlossenen, dann auch nachgewiesenen Zusammenhang zwischen Zusatzauftrieb und Verdichtungsstoß auf theoretischer Grundlage geführt werden, indem gezeigt wird, inwiefern ein Verdichtungsstoß einen Zusatzauftrieb über den bei stoßfreier Strömung bereits vorhandenen Auftrieb hinaus verursacht.

---

[1] *H. B. Helmbold*, Jahrb. 1942/43 d. Dt. Akad. d. Luftfahrtforschg., S. 367; *O. Knappe*, Ber. 156 d. Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforschg. (1943), S. 128; *H. B. Helmbold*, FIAT-Rep. 1092 (1947).

[2] *A. Busemann*, Schriften d. Dt. Akad. d. Luftfahrtforschg., Heft 18 (1940), Diskussionsbeitrag S. 22.; *H. B. Helmbold*, Dt. Luftfahrtforschg., Unt. u. Mitt. 2502 (1944).

[3] *H. B. Helmbold*, Dt. Luftfahrtforschg., Unt. u. Mitt. 2505 (1945).

Zur Frage des „Stoßverzugs", d. h. der Tatsache, daß ein Stoß unter Umständen erst nach sehr erheblicher Überschreitung der kritischen Machzahl auftritt, sei hier nur auf die Stellung des Problems durch *G. I. Taylor*[1] und die Entdeckung mathematischer „Grenzlinien" für die adiabatische Potentialströmung durch *W. Tollmien*[2] hingewiesen. Wenn gezeigt werden kann, daß das Vorhandensein eines Verdichtungsstoßes (außer im Fall des symmetrisch angeblasenen symmetrischen Profils) einen Zusatzauftrieb bedingt, kann der Nachweis des Zusatzauftriebs den unmittelbaren Nachweis des Verdichtungsstoßes und gegebenenfalls auch des Stoßverzugs ersetzen.

2. Die Methode der Expansionsquellen. Zur Darstellung der kompressiblen Potentialströmung verwenden wir die von *L. Poggi*[3] begründete Methode der Expansionsquellen. Diese beruht darauf, daß es möglich ist, die kompressible Gasströmung kinematisch als Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit aufzufassen, welche in Beschleunigungsgebieten zusätzliche Flüssigkeit hervorbringt und in Verzögerungsgebieten Flüssigkeit verschwinden läßt. Da mit der Beschleunigung des strömenden Gases Expansion, mit seiner Verzögerung Kompression verbunden ist, sprechen wir von Expansionsquellen und Kompressionssenken. Diese ortsfesten Quellen und Senken, welche dazu dienen, die Dichteveränderungen der kompressiblen Gasströmung nachzuahmen, haben jedoch keine dynamische Bedeutung, sondern nur den Sinn eines kinematischen Gedankenmodells. Der Verdichtungsstoß wird sich uns als flächenhafte Kompressionssenke darstellen; einen Vorstoß in ähnlichem Sinne hatte bereits *O. Knappe*[4] unternommen.

Auf anschauliche Weise ergibt sich die vorstehend skizzierte Vorstellung folgendermaßen: Für eine Stromröhre in der kompressiblen Gasströmung, deren als sehr klein angenommener Querschnitt f längs der Stromlinie s veränderlich ist, besagt die Kontinuitätsbedingung, daß durch jeden solchen Querschnitt in der Zeiteinheit die gleiche Masse hindurchströmt; der Massenfluß ist also

$$\dot{m} = \varrho w f = \text{konst.}, \tag{2}$$

wobei ϱ die Dichte und w die Geschwindigkeit bedeutet. Das durch die verschiedenen Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchströmende Flüssigkeitsvolumen ist jedoch verschieden, nämlich an der Stelle $s = s_0$ der Stromlinie $\dot{V}_0 = w_0 f_0$ und an der stromabwärts darauffolgenden Stelle $s = s_0 + ds$)

$$\dot{V}_0 + d\dot{V} = w_0 f_0 + \frac{d(wf)}{ds}\, ds.$$

Also befindet sich zwischen den bei s_0 und $s_0 + ds$ gelegenen Querschnitten eine Volumenquelle von der Ergiebigkeit (Volumen je Zeiteinheit)

$$\mathrm{d}\dot{V} = \frac{d(wf)}{ds}\, ds = \frac{d(\dot{m}/\varrho)}{ds}\, ds = -\frac{\dot{m}}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\, ds = -\frac{wf}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\, ds. \tag{3}$$

Indem wir nun aus der Bewegungsgleichung $dp/\varrho + w\, dw = 0$ und aus der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwacher Druckstörungen, die Schallgeschwindigkeit a, $dp/\mathrm{d}\varrho = \mathrm{a}^2$ den Druck p eliminieren, erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{w}{a^2}\, dw. \tag{4}$$

Dies in (3) eingesetzt ergibt zunächst

$$d\dot{V} = \left(\frac{w}{a}\right)^2 \frac{dw}{ds}\, f \cdot ds$$

und, wenn wir fortan die Quellergiebigkeit mit Q statt $\dot{V}$, das Volumen der Stromröhre zwischen den bei s_0 und $s_0 + ds$ gelegenen Querschnitten mit $d\tau = f\, ds$ bezeichnen und beachten, daß im Ganzen der Strömung betrachtet w auch noch von den zu s orthogonalen Koordinaten abhängt,

$$\frac{dQ}{d\tau} = \left(\frac{w}{a}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} \tag{5}$$

---

[1] *G. I. Taylor*, 5. Convegno Volta 1935, S. 198, R. Acc. d'Italia, Roma 1936.

[2] *W. Tollmien*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 117; 21 (1941) S. 140. — *G. Guderley*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 185.

[3] *L. Poggi*, Aerotecnica 12 (1932) S. 1579; 14 (1934) S. 532.

[4] *O. Knappe*, Ber. 156 d. Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforschg. (1943), S. 174.

als Ausdruck für die Dichte der Volumenquellen in der kompressiblen Strömung. Hieraus ist unmittelbar abzulesen, daß der Beschleunigung ($\partial w/\partial s > 0$) Expansionsquellen, der Verzögerung ($\partial w/\partial s < 0$) Kompressionssenken entsprechen und daß deren Dichte dem Quadrat der örtlichen Machzahl $\mathfrak{M} = w/a$ proportional ist.

Ist die räumliche Verteilung der Quelldichte nach Gl. (5) bekannt, so kann die kompressible Strömung als inkompressible Potentialströmung berechnet werden. Da aber auf der rechten Seite dieser Gleichung die gesuchten Geschwindigkeiten vorkommen, muß man über eine Ausgangslösung verfügen, von der aus verbesserte Lösungen im Iterationsverfahren gewonnen werden können. *L. Poggi* benutzte die quellenfreie inkompressible Strömung als Ausgangslösung, in neuerer Zeit verwendet man hierfür meist die *Prandtl*sche erste Näherung für die fast parallele Unterschallströmung in der von *A. Busemann* angegebenen Form[1]; wir werden uns diesem Verfahren anschließen.

3. Die kompressible Strömung mit Verdichtungsstoß. Für die Anwendung auf den Verdichtungsstoß möge der einfacheren Darstellung halber angenommen werden, daß dieser die Stromlinien überall senkrecht durchsetzt (orthogonaler Stoß), was jedenfalls mindestens angenähert zutrifft, solange die Strömung am Körper anliegt; der Stoß soll also schwach genug sein, um keine Ablösung der Grenzschicht (falls wir eine solche überhaupt als vorhanden berücksichtigen wollen) hervorzurufen; andernfalls ergibt sich ein krummer oder schräger Stoß. Übrigens ist die Annahme auf das Ergebnis ohne Einfluß. Der Stoß fällt also innerhalb der betrachteten Stromröhre mit einem ihrer Querschnitte zusammen. Durch die Vorderfläche f_1 des Stoßes strömt in der Zeiteinheit das Volumen $\dot{V}_1 = w_1 f_1$, durch seine Rückenfläche f_2 das Volumen je Zeiteinheit $\dot{V}_2 = w_2 f_2$, die Flächen f_1 und f_2 fallen aber räumlich zusammen, so daß $f_1 = f_2 = f_{St}$ gilt. Da der Massenfluß durch alle Querschnitte konstant gleich $\varrho w f$ ist, entspricht der sprunghaften Verdichtung von ϱ_1 auf $\varrho_2 > \varrho_1$ bei konstantem Querschnitt f_{St} eine sprunghafte Abnahme der Geschwindigkeit von w_1 auf $w_2 < w_1$ und eine ebensolche Abnahme des Volumenflusses um den Betrag $(w_1 - w_2) f_{St}$. Der Stoß bedeutet also eine flächenhafte Senke von der (negativen) Ergiebigkeit

$$Q_{St} = (w_2 - w_1) f_{St} < 0. \tag{6}$$

Wir müssen nun im Hinblick auf später folgende Überlegungen noch zeigen, daß der Stoß eine flächenhafte Konzentration von Kompressionssenken darstellt, die bei fehlendem Stoß räumlich verteilt vorhanden zu denken wären. Mit oder ohne Stoß gilt nämlich der Satz:

Die Summe (Integral) aller in der kompressiblen Strömung vorhandenen Expansionsquellen ist innerhalb jeder einzelnen Stromröhre und daher insgesamt gleich Null.

Dies folgt durch Integration der Gleichung $dQ \equiv d\dot{V} = d(wf)$ bis zum Stoß:

$$\left.\begin{aligned} w_1 f_{St} &= \int_{-\infty}^{s_1} \frac{dQ}{ds}\, ds + w_\infty f_\infty , \\ w_2 f_{St} &= \int_{\infty}^{s_2} \frac{dQ}{ds}\, ds + w_\infty f_\infty ; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

hieraus und aus (6) ergibt sich

$$-Q_{St} = (w_1 - w_2) f_{St} = \int_{-\infty}^{s_1} \frac{dQ}{ds}\, ds - \int_{\infty}^{s_2} \frac{dQ}{ds}\, ds ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{s_1} \frac{dQ}{ds}\, ds + Q_{St} + \int_{s_2}^{\infty} \frac{dQ}{ds}\, ds = 0, \tag{8}$$

was zu beweisen war. Die Umwandlung der Strömung ohne Stoß in eine solche mit Stoß können wir gedanklich aber auch auf die Weise vornehmen, daß wir mit der Einfügung des Stoßes in die stoßfreie Strömung gleichzeitig räumlich verteilte Expansionsquellen hinzufügen; im Grunde ist das mit der vorigen Betrachtungsweise gleichbedeutend, denn das Fortnehmen einer Senke ist dem Hinzufügen einer entgegengesetzt gleichstarken Quelle gleichwertig.

[1] *A. Busemann*, Jahrb. d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1928, S. 95; Artikel „Gasdynamik" im Handb. d. Experimentalphysik, Bd. IV, 1, S. 410 ff. Leipzig 1931.

Bei der Bestimmung der Integrationskonstanten w_∞, f_∞ in (7) haben wir stillschweigend eine Vereinfachung vorgenommen, deren Zulässigkeit durchaus noch erörtert werden muß. Ist nämlich ein Stoß vorhanden, so erfährt beim Durchgang durch denselben der Ruhedruck (Pitotdruck) p_0 eine Verringerung. Da die Strömung hinter dem Stoß wieder als adiabatisch gelten darf (Wärmeleitung wird vernachlässigt), ist die Dichte im Unendlichen hinter dem Stoß kleiner als im Unendlichen davor

$$\left[\varrho_{+\infty} = \varrho_{-\infty}\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

und nach der Kontinuitätsbedingung ist dann $(wf)_{+\infty} > (wf)_{-\infty}$. Die Vereinfachung, welche $(wf)_{+\infty} = (wf)_{-\infty} = w_\infty f_\infty$ setzt, ist nur dann erlaubt, wenn der Ruhedruckverlust im Stoß vernachlässigbar klein ist, wenn also der Stoß so schwach ist, daß die Zustandsänderung des Gases im Stoß noch als adiabatisch gelten darf. Wir müssen uns demnach, da wir an der Gültigkeit des soeben aufgestellten Satzes festhalten wollen, auf schwache Stöße beschränken; wir dürfen es, weil stärkere Stöße als die der Einschränkung unterworfenen die Grenzschicht der Strömung von der Körperoberfläche veranlassen würden, womit die Berechnungsmöglichkeit ohnehin verloren geht. Wir gewinnen dabei weiter den Vorteil, daß wir das Vorhandensein von Wirbeln im Nachlauf des Stoßes, d. h. auf den Stromlinien, die den Stoß durchsetzen, außer acht lassen und die Strömung weiterhin als adiabatische Potentialströmung behandeln dürfen; nur dürfen wir sie nicht als isentropisch auffassen, weil die Entropievermehrung im Stoß zwar sehr klein, aber doch noch von Null verschieden ist; wir sprechen also von einer nichtumkehrbaren Potentialströmung, da sie im Stoß selber nicht umkehrbar ist. Ein „Verdünnungsstoß" ist ja wegen der mit ihm verbundenen Entropieverminderung physikalisch unmöglich.

4. Der Zusatzauftrieb des Verdichtungsstoßes. Vorbereitend bestimmen wir nun die Auftriebsänderung, welche entsteht, wenn man in die inkompressible Strömung um den zylindrischen Körper einen Quellpunkt einfügt.

Indem man sich die Expansionsquellen und Kompressionssenken als singuläre Punkte über den Raum verteilt bzw. in der Stoßfläche konzentriert vorstellt, ergibt sich der Vorteil, daß sich ihr Feld der quellenfreien inkompressiblen Grundströmung linear überlagert und daß für die uns hier interessierende ebene Strömung die hydrodynamischen Singularitäten bei einer konformen Abbildung erhalten bleiben. Die abgebildete Strömung stellt dann allerdings keine mögliche Gasströmung mehr dar, weil sie ja mit der Abbildung gegenüber der Originalströmung im unendlich Kleinen eine Volumenverzerrung gemäß

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2$$

erfahren hat und demnach der Gleichung (5) nicht mehr gehorchen wird. In jedem Falle, bei der Originalströmung wie bei der abgebildeten Strömung, hat man noch zu beachten, daß die Hinzufügung von Quellen zur inkompressiblen Grundströmung um die Kontur die Randbedingung verletzt, solange man nicht im Innern der Kontur passende weitere Singularitäten hinzufügt, welche die Randbedingung wiederherstellen. Um dies in einfacher Weise zu bewerkstelligen, nehmen wir die konforme Abbildung der gegebenen Originalkontur auf den Einheitskreis, in dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung liegen möge, zu Hilfe.

In der Kreisebene (ζ) befinde sich außerhalb des Kreises im Punkte $P_1(\xi_1, \eta_1)$ ein Quellpunkt von der Ergiebigkeit Q; dieser verursacht gemeinsam mit den im Kreisinnern anzubringenden Zusatzquellen im Punkte $P(\xi, \eta)$ der Kreiskontur eine Störgeschwindigkeit mit den Komponenten $(u' \| \xi, v' \| \eta)$

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{Q}{\pi}\,\frac{(\xi_1\sqrt{1-\xi^2}-\eta_1\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{2(\xi_1\xi+\eta_1\sqrt{1-\xi^2})-(1+R^2)} \\ \text{und}\qquad v' &= -\frac{Q}{\pi}\,\frac{(\xi_1\sqrt{1-\xi^2}-\eta_1\xi)\xi}{2(\xi_1\xi+\eta_1\sqrt{1-\xi^2})-(1+R^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei $R^2 = \xi_1^2 + \eta^2$ ist. Die Abbildung wählen wir so, daß derjenige Punkt des Einheitskreises, der dem Zusammenflußpunkt (Hinterkante) der gegebenen Kontur entspricht, die Koordinaten $\xi = 1$, $\eta = 0$ hat; dann ergibt sich aus (9) für diesen Punkt

$$u'(\zeta=1) = 0 \quad \text{und} \quad v'(\zeta=1) = -\frac{Q}{\pi}\,\frac{\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2}, \tag{10}$$

also gerade doppelt so viel, wie wenn der Quellpunkt ohne den umströmten Einheitskreis allein vorhanden wäre. Da dieser Punkt ($\zeta=1$) jedoch ebenfalls Zusammenflußpunkt sein muß, muß dort die Geschwindigkeit überhaupt verschwinden, was ohne Störung der Randbedingung nur dadurch möglich ist, daß ein im Kreismittelpunkt gelegener Wirbelpunkt hinzugefügt wird, welcher im Punkte $\zeta=1$ die Geschwindigkeit $\Delta\Gamma/2\pi=v'$ zusätzlich verursacht; er muß also nach (10) die Wirbelstärke (rechtsdrehend positiv)

$$\Delta\Gamma=-2Q\frac{\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2} \tag{11}$$

haben. Nachdem die Koordinaten des Zusammenflußpunktes in der Kreisebene mit $\xi=1$, $\eta=0$ festgesetzt wurden, muß die quellenfreie Grundströmung in dieser Ebene aus einer Parallelströmung W' mit den Komponenten $U'=W'\cos\alpha\|\xi$ und $V'=W'\sin\alpha\|\eta$, einer entgegengesetzt zu W' orientierten Dipolströmung mit dem Moment $M=2\pi U'$ und einer Wirbelströmung mit der Zirkulation $\Gamma_0=4\pi V'$ (Dipol und Wirbel liegen im Kreismittelpunkt) zusammengesetzt sein, damit auch in dieser Grundströmung die Geschwindigkeit im Punkte $\xi=1$, $\eta=0$ verschwindet. Dementsprechend werden wir auch in der Originalströmung um die Profilkontur das Koordinatensystem so wählen, daß die Bezugslänge der Kontur (Profiltiefe) L gleich dem Durchmesser $D=2$ des Einheitskreises ist, die Hinterkante die Koordinaten $x=1$, $y=0$ erhält und $U=W\cos\alpha\|x$ sowie $V=W\sin\alpha\|y$ ist. Nach (11) verursacht der Quellpunkt in der Strömung (W') um den Einheitskreis die zusätzliche Auftriebszahl

$$\Delta c_a'=\frac{2\Delta\Gamma}{LW'}=-\frac{4\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2}\frac{Q}{LW'}, \tag{12}$$

und der entsprechende Quellpunkt in der Originalströmung (W) beispielsweise um eine Ellipse vom Dickenverhältnis δ die zusätzliche Auftriebszahl

$$\Delta c_a=\frac{2\Delta\Gamma}{LW}=-\frac{4\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2}\frac{Q}{LW}; \tag{13}$$

dabei ist Δc_a um einen Faktor $W'/W=\frac{1}{2}(1+\delta)$ kleiner als $\Delta c_a'$; denn um L (die große Achse der Ellipse) gleich dem Durchmesser $D=2$ des Kreises zu machen, muß die Abbildungsfunktion

$$z=\frac{1+\delta}{2}\zeta+\frac{1-\delta}{2}\frac{1}{\zeta}$$

gewählt werden, und dann wird im Unendlichen ($\zeta=\infty$)

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=\left|\frac{W'}{W}\right|=\frac{1+\delta}{2}.$$

Nachdem wir uns nun schon klar gemacht haben, daß der Verdichtungsstoß kinematisch als Kompressionssenke aufzufassen ist, können wir das vorläufige Ergebnis (13) als den Zusatzauftrieb deuten, den ein Verdichtungsstoß mit der negativen Ergiebigkeit Q unmittelbar, d. h. ohne Berücksichtigung der dem Stoß zugehörigen räumlich verteilten Expansionsquellen, verursachen würde, wenn wir die über die Stoßfläche (in der ebenen Strömung: Stoßlinie) verteilte gesamte Ergiebigkeit vereinfachend in einem Punkte, beispielsweise dem Schwerpunkt der Intensitätsverteilung mit den Koordinaten x_1, y_1 konzentriert annehmen; ξ_1 und η_1 sind dann die Koordinaten des abgebildeten Schwerpunktes in der Kreisebene. Natürlich ist das, auch von der Vereinfachung abgesehen, noch nicht der wahre Zusatzauftrieb. Diesen würden wir erst erhalten, wenn wir durch Integration einer der Gleichung (13) entsprechenden Differentialformel den Einfluß der räumlich verteilten stoßbedingten Expansionsquellen hinzunehmen würden, welcher entgegengesetztes Vorzeichen hat und somit den Zusatzauftrieb gegenüber unsrer vorläufigen Abschätzung vermindern muß. Die genaue Ermittlung der zusätzlichen Quellverteilung ist jedoch recht mühsam, so daß wir nach einem Verfahren suchen müssen, welches den erwähnten Einfluß wenigstens näherungsweise zu erfassen gestattet.

Hierfür wollen wir uns der von vornherein gemachten Voraussetzung erinnern, daß der umströmte zylindrische Körper ein schlankes Profil hat und unter kleinem Anstellwinkel angeblasen wird, so daß die Strömung nur wenig von einer Parallelströmung abweicht. Dann wird das Geschwindigkeitspotential Φ aus einem Grundpotential $\Phi_0=Ux$ und einem kleinen Störpotential φ bestehen und die Störgeschwindigkeiten $u=\partial\varphi/\partial x$ und $v=\partial\varphi/\partial y$ werden ebenfalls klein gegen $U=\partial\Phi_0/\partial x$ sein. Die Kontinuitätsbedingung der kompressiblen Strömung nimmt bei Verwendung kartesischer Koordinaten die bekannte Form

$$\frac{\partial[\varrho(U+u)]}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{v}=0 \tag{14}$$

an, welche besagt daß die Dichte der Massenquellen (das ist die Bedeutung der linken Seite) gleich Null ist. Diese Gleichung formen wir in

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\frac{U+u}{\varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\frac{v}{\varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) \tag{14a}$$

um. Die linke Seite der neuen Gleichung ist dann aber nichts anderes als die Dichte der Volumenquellen, die wir unter der Bezeichnung $dQ/d\tau$ mit (5) bereits berechnet haben; nur geht deren rechte Seite für die jetzt betrachtete fast parallele Strömung in $(U/a_\infty)^2\cdot\partial u/\partial x$ über, so daß wir (5) durch

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\left(\frac{U}{a_\infty}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\equiv \mathfrak{M}_\infty^2\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{15}$$

oder nach Einführung des Störpotentials durch

$$(1-\mathfrak{M}_\infty^2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{15a}$$

ersetzen können. Diese linearisierte Potentialgleichung der kompressiblen Strömung geht für $\mathfrak{M}_\infty<1$ in die Potentialgleichung einer inkompressiblen Strömung (i) über, wenn man nach *L. Prandtl*[1] die Koordinaten entsprechender Punkte gemäß den Gleichungen $x_i=x$ und $y_i=\sqrt{1-\mathfrak{M}_\infty^2}\;y$ verknüpft. Nach *A. Busemann*[1] müssen wir die Störpotentiale in entsprechenden Punkten durch $\varphi_i=(1-\mathfrak{M}_\infty^2)\varphi$ zueinander in Beziehung setzen, damit die Randstromlinien (Kontur) der kompressiblen Strömung in Randstromlinien der inkompressiblen Strömung übergehen („Stromlinienanalogie"), was sich leicht verifizieren läßt. Man erhält demnach umgekehrt die Störpotentiale φ in einer kompressiblen fast parallelen Unterschallströmung, wenn man die Störpotentiale φ_i in einer inkompressiblen Vergleichsströmung, deren Querkoordinaten y_i gegenüber y um den Faktor $1/\mathfrak{P}$ kontrahiert sind, mit dem Faktor $\mathfrak{P}^2$ vergrößert. Für die Störgeschwindigkeiten in entsprechenden Punkten gilt dann $u=\mathfrak{P}^2u_i$ und $v=\mathfrak{P}v_i$.

Wesentlich für unseren Zweck ist, daß die Gleichungen (15) und (15a) in den Störgeschwindigkeiten und im Störpotential linear sind, so daß man ihre Lösungen überlagern darf. Es sei nun in der kompressiblen Strömung längs des Stückes h einer Äquipotentiallinie ein Verdichtungsstoß mit dem (längs h veränderlichen) Geschwindigkeitssprung w_1-w_2 vorhanden. Ihm entspricht in der inkompressiblen Vergleichsströmung nach der Stromlinienanalogie eine überlagerte Senkenverteilung mit dem Geschwindigkeitssprung $w_{i1}-w_{i2}=(w_1-w_2)/\mathfrak{P}^2$ längs des Stückes $h_i=h/\mathfrak{P}$ der entsprechenden Äquipotentiallinie. Die (negative) Ergiebigkeit $(Q_i)_{St}$ dieser Senkenverteilung ist gegenüber Q_{St} um $1/\mathfrak{P}^3$ verkleinert, weil die Ergiebigkeit proportional dem Produkt aus dem Geschwindigkeitssprung und der Stoßfläche (Stoßlänge h) ist. Nach (13) verursacht dann die Senkenverteilung $(Q_i)_{St}$ in der inkompressiblen Strömung einen Zusatzauftrieb

$$\Delta c_{ai}=-\frac{4}{\mathfrak{P}^3}\,\frac{\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2}\,\frac{Q_{St}}{LW}\,, \tag{16}$$

wobei $W=U$ ist; dieser Ausdruck ist positiv, weil Q_{St} negativ ist. Dem Vorhandensein der Senkenverteilung $(Q_i)_{St}$ entspricht ein gewisser Beitrag Δu_i zu den Störgeschwindigkeiten u_i und zu der in (15) rechts vorkommenden Ableitung $\partial u_i/\partial x$, aber kein Beitrag zur Dichte der Volumenquellen

$$\frac{dQ_i}{d\tau}=\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\,,$$

weil auf der rechten Seite von (15) bei inkompressibler Strömung $\mathfrak{M}_\infty=0$ zu setzen ist. Anders ist dies nun in der nach der Stromlinienanalogie zugeordneten kompressiblen Originalströmung: dort sind außer der Stoßsenke Q_{St} nach (15) zusätzliche stoßbedingte Quellen

$$\frac{d(\Delta Q)}{d\tau}=\mathfrak{M}_\infty^2\,\mathfrak{P}^2\,\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x}$$

vorhanden, welche den Zusatzauftrieb abschwächen. Ihren Einfluß erfassen wir, indem wir den dem imkompressiblen Zusatzauftrieb Δc_{ai} der Gleichung (16) entsprechenden kompressiblen Zusatzauftrieb Δc_a nach der Stromlinienanalogie berechnen. Die Auftriebszahlen sind den Störpotentialen proportional, beim Rückgang von der inkompressiblen Vergleichsströmung zur kompressiblen Originalströmung also mit $\mathfrak{P}^2$ zu vergrößern. So erhält man entsprechend (16) den Zusatzauftrieb des Verdichtungsstoßes

$$\Delta c_a=\frac{4}{\mathfrak{P}}\int_0^h\frac{\eta_1}{(1-\xi_1)^2+\eta_1^2}\,\frac{w_1-w_2}{W}\,\frac{dn}{L}\,. \tag{17}$$

[1] Fußnote 1 Seite 282.

Der Faktor $1/\mathfrak{P}$ stellt hier den abschwächenden Einfluß der stoßbedingten Expansionsquellen dar. Außer den stoßbedingten Expansionsquellen sind natürlich von vornherein andere Expansionsquellen nach (15) bereits vorhanden; ihr Einfluß ist aber in dem „stoßfreien" Auftrieb nach (1) schon enthalten. Mit n ist der längs des Stoßes (Äquipotentiallinie) gemessene Wandabstand bezeichnet; der Stoß beginnt ja bekanntlich an der Körperoberfläche, wenn das Vorhandensein der Grenzschicht unberücksichtigt bleibt. Jedem Werte n ist ein Punkt (x_1, y_1) in der Originalebene und durch die konforme Abbildung ein Punkt (ξ_1, η_1) in der Kreisebene zugeordnet.

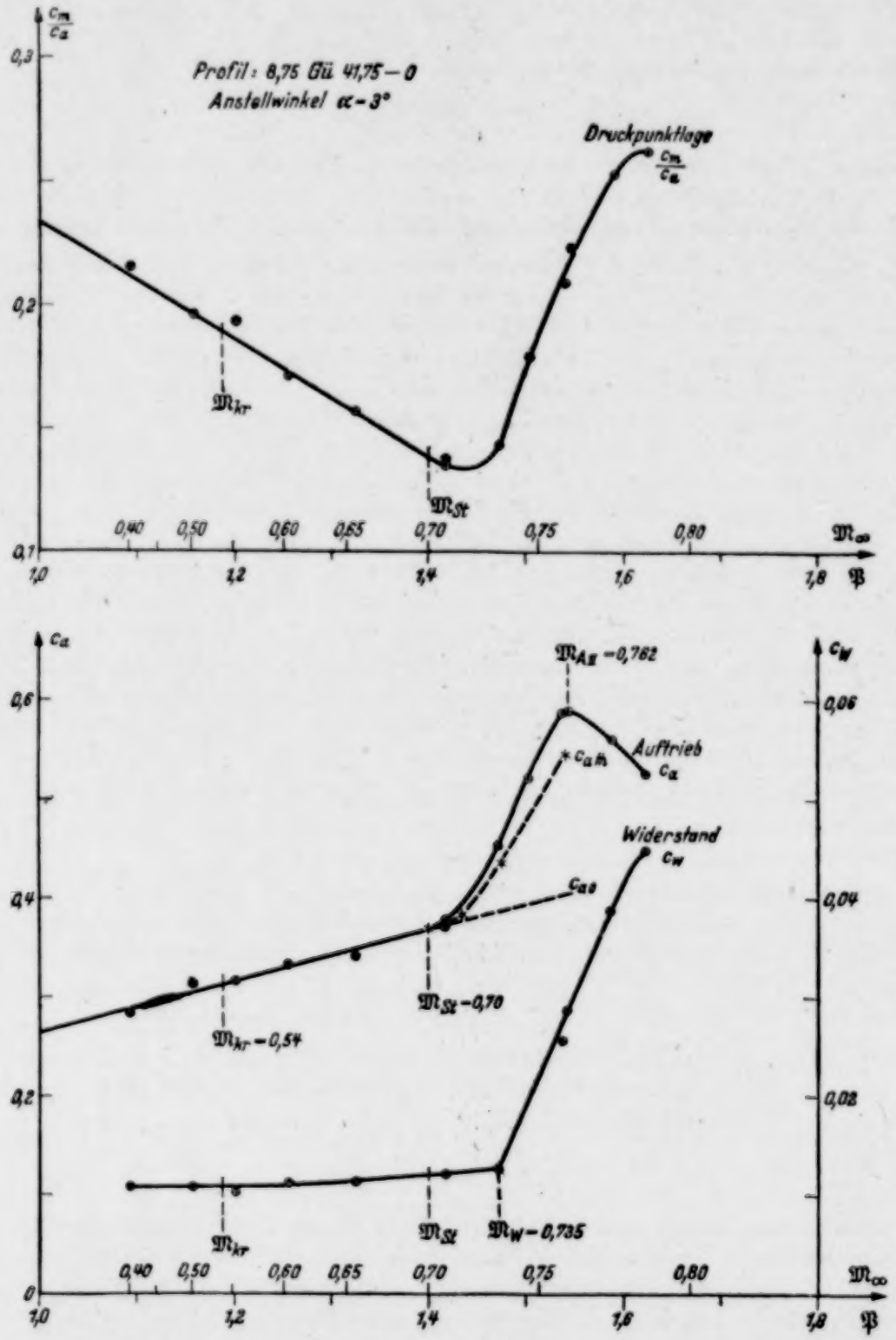


Abb. 1. Gemessene Strömungskräfte und theoretischer Auftrieb ($C_{a\,th}$) über dem *Prandtl*faktor $\mathfrak{P} = 1/\sqrt{1 - \mathfrak{M}_\infty^2}$.

Da in der Unterschallströmung ein orthogonaler Verdichtungsstoß nur am stromabwärtigen Ende eines örtlichen Überschallgebietes vorkommt, ist der Gültigkeitsbereich der streng-genommen auf die reine (unterkritische) Unterschallströmung beschränkten Stromlinienanalogie bereits überschritten und ein dementsprechender Fehler in Kauf genommen. Da sich aber die

Integralaussagen der auf die Stromlinienanalogie begründeten *Prandtl*schen Regel nicht nur für den Auftrieb, sondern auch für die übrigen Strömungskräfte empirisch sogar im überkritischen Bereich ($\mathfrak{M}_\infty > \mathfrak{M}_{kr}$), d. h. bei Vorhandensein eines örtlichen Überschallgebietes, als anwendbar erwiesen haben, ist auch hier zu erwarten, daß der entstandene Fehler klein, wenn nicht überhaupt zu vernachlässigen ist. Dafür spricht folgender Vergleich zwischen theoretischer Abschätzung und Versuchsergebnis (Abb. 1):

An einem symmetrischen Profil von 144 mm Tiefe mit dem Dickenverhältnis $\delta = 0{,}0875$ und der Dickenrücklage $\xi_\delta = 0{,}418$ (in Profiltiefen L gemessen) wurden beim Anstellwinkel $\alpha = 3°$ im 360 mm hohen Kanal nachstehend aufgeführte und mit der Berechnung (*th*) verglichene Werte gemessen:[1]

$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{M}_\infty$	c_a	c_{a0} Gl. (1)	Δc_a	$(\Delta c_a)_{th}$ Gl. (17)	$c_{a\,th}$	
1,400	0,700	0,368	0,368	0	0	0,368	$c_a = c_{a0} + \Delta c_a$
1,433	0,716	0,392	0,376	0,016	0,006	0,382	
1,474	0,735	0,459	0,386	0,073	0,045	0,435	$c_{a\,th} = c_{a0} + (\Delta c_a)_{th}$
1,538	0,760	0,587	0,404	0,183	0,141	0,545	

Wegen der Nähe der Kanalwände liegen die gemessenen Werte c_a gegenüber den Auftriebszahlen in freier Strömung systematisch zu hoch; die aus den Meßwerten abgeleiteten Werte Δc_a sind im Hinblick auf analoge Freistrahlmessungen schätzungsweise mit einem Faktor der Größenordnung 0,55 zu korrigieren, den abschwächenden Einfluß der Grenzschicht auf $(\Delta c_a)_{th}$ kann man auf eine Größenordnung von 10 % veranschlagen; dann besteht angenäherte Übereinstimmung bei den beiden höchsten Machzahlen.

Bei $\mathfrak{M}_\infty = 0{,}735$ beginnt ein plötzlicher Wiederstandsanstieg (Abb. 1), der Stoß befindet sich gerade an der dicksten Stelle des Profils ($\xi = 0{,}418$) und an dieser Stelle setzt Rückströmen der Grenzschicht ein; oberhalb dieser Machzahl liegt die Strömung nicht mehr vollständig an, was doch Voraussetzung für die Berechnung von $(\Delta c_a)_{th}$ war; trotzdem bleibt die Rechnung bis $\mathfrak{M}_\infty = 0{,}75$ brauchbar. Bei $\mathfrak{M}_\infty = 0{,}760$ wurde Rückströmen der Grenzschicht an der Meßstelle $\xi = 0{,}70$ beobachtet, während der Stoß erst bis $\xi \approx 0{,}62$ vorgerückt ist; bereits bei $\mathfrak{M}_\infty = 0{,}749$ hat die Grenzschichtablösung die Hinterkante erreicht (aus den statischen Drücken der Druckseite zu erschließen), damit beginnt die vollständige Ablösung der Strömung von der Saugseite, und von $\mathfrak{M}_\infty = 0{,}762$ ab fällt der Auftrieb wieder ab. (Abb. 1).

Der Berechnung von $(\Delta c_a)_{th}$ liegen zugrunde die Rücklage ξ des Stoßes gegenüber der Vorderkante in Profiltiefen L gemessen, der Geschwindigkeitssprung $(w_1 - w_2)_0$ des Stoßes an der Kontur und die Stoßlänge nach der Formel

$$h = \frac{(w_1)_0 - a_{kr}}{a_{kr}} R_0$$

(*G. Richter*), in welcher R_0 den Krümmungsradius der Kontur und a_{kr} die kritische Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Aus den Messungen ergab sich:

$\mathfrak{M}_\infty$	ξ	$\frac{(w_1 - w_2)_0}{W}$	$\frac{h}{L}$
0,700	0,11	0	0
0,716	0,20	0,130	0,121
0,735	0,418	0,235	0,338
0,760	0,62	0,338	0,558

5. Zusammenfassung. Der Zusatzauftrieb des Verdichtungsstoßes läßt sich berechnen, indem man den Stoß als Kompressionssenke auffaßt, mit welcher ein System räumlich verteilter Expansionsquellen entgegengesetzt gleicher Gesamtergiebigkeit verbunden ist. Der auftriebvermindernde Einfluß der Expansionsquellen kann in erster Näherung nach der Stromlinienanalogie ermittelt werden.

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 280.

(Eingegangen am 11. August 1948.)

Anschrift des Verfassers: Professor *Heinrich Bruno Helmbold*, (13b) München 23, Römerstraße 14 II.

Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten.

Von H. Ludwieg und W. Tillmann.

1. Einleitung. Die Wandschubspannungen in laminaren Grenzschichten lassen sich auf rein theoretischem Wege berechnen, da man hier den Zusammenhang von Geschwindigkeitsprofil und übertragener Schubspannung kennt. Da dieser für die durch den turbulenten Austausch hervorgerufenen Schubspannungen noch fehlt, ist ein ähnliches Vorgehen bei den turbulenten Reibungsschichten nicht möglich. Aus diesem Grunde ist man bei der Ermittlung der Gesetze für die turbulente Wandreibung auf experimentelle Untersuchungen angewiesen. Diese sind in zwei einfachen Fällen, an einer nicht angestellten, ebenen Platte – im folgenden kurz „Plattenströmung" genannt – und in einem Rohr bzw. Kanal von flach rechteckigem, konstantem Querschnitt – im weiteren mit „Rohr- bzw. Kanalströmung" bezeichnet – zur Genüge durchgeführt worden. Aus den Versuchsergebnissen haben die einzelnen Bearbeiter einfache Näherungsformeln für den Reibungswiderstand gefolgert, die einigermaßen übereinstimmen.

Einige Untersuchungen sind auch an Reibungsschichten bei Druckanstieg oder -abfall angestellt worden, die aber teils keine, teils unbefriedigende Aussagen über die Wandreibung enthalten. Diese Versuche wurden in einem Kanal von kreisförmigem[1] oder meistens rechteckigem Querschnitt ausgeführt[2], [3], [4], [5]. Bei letzteren war eine Kanalwand als ebene Meßplatte hergestellt, an der die zu untersuchende Reibungsschicht vermessen wurde. Die gegenüberliegende Wand konnte zur Einstellung des gewünschten Druckverlaufes verstellt werden. Sie war von der Versuchsfläche soweit entfernt, daß zwischen beiden Reibungsschichten noch ein Kern mit Potentialströmung erhalten blieb (freie Reibungsschicht). Aus den gemessenen Geschwindigkeitsprofilen wurde mit Hilfe der von *v. Kármán* angegebenen Impulsgleichung die Wandschubspannung ermittelt. Der Vorteil der beschriebenen Versuchsanordnung liegt darin, daß man mit verhältnismäßig kleinen Anlagen dicke Reibungsschichten erzeugen kann (große *Reynolds*sche Zahlen). Ein wesentlicher Nachteil ist die im Verhältnis zur Reibungsschichtdicke geringe Breite der Versuchsströmung. Hierdurch können leicht Sekundärströmungen entstehen, welche die für die Auswertung nach der *v. Kármán*schen Impulsgleichung vorausgesetzte Zweidimensionalität der Strömung aufheben und vermutlich für die unwahrscheinlichen Ergebnisse der oben erwähnten Autoren verantwortlich sind. Einige von ihnen hatten nämlich festgestellt, daß in stark verzögerten Strömungen der örtliche Widerstandsbeiwert $c_f' (= \tau_w/Q$, wo τ_w die Wandschubspannung und Q der Staudruck außerhalb der Reibungsschicht ist) nach einer gewissen Laufstrecke in Strömungsrichtung plötzlich auf ein Mehrfaches des Anfangswertes anstieg, und nicht, wie man eigentlich analog dem Verhalten der laminaren Grenzschicht erwarten sollte, abfiel. Da sich hierfür keine stichhaltige Begründung finden ließ, ist von *W. Tillmann*[6] untersucht worden, ob dieser Effekt nicht durch Sekundärströmungen vorgetäuscht wurde. In einem Schnitt quer durch den Kanal wurde die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung bestimmt. Eine Abschätzung des Einflusses der hierbei festgestellten Sekundärströmungen ergab einen um 40 % erniedrigten c_f'-Wert. Damit war das bisherige Meßverfahren in Frage gestellt.

Neuerdings ist von *H. Ludwieg*[7] ein einfaches Meßgerät entwickelt worden, mit dem man an beliebigen Meßpunkten mittels einer Wärmeübergangsmessung die Wandschubspannung bestimmen kann. Dieses direkte Meßverfahren ist von eventuell auftretenden Sekundärströmungen unabhängig. Mit dem neuen Meßgerät wurden die Untersuchungen über den Reibungswiderstand turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg und -abfall wieder aufgenommen, worüber in der vorliegenden Arbeit berichtet werden soll.

---

[1] *A. Buri*, Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung, Diss. Zürich 1931.

[2] *E. Gruschwitz*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 321.

[3] *A. Kehl*, Ing.-Arch. 13 (1943) S. 293.

[4] *W. Mangler*, Das Verhalten der Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten mit Druckanstieg. ZWB, UM 3052 (1943).

[5] *K. Wieghardt*, Über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten bei veränderlichem Außendruck. ZWB, UM 6603 (1943).

[6] *W. Tillmann*, Über die Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg, Diplomarbeit. Göttingen 1947.

[7] *H. Ludwieg*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 207.

2. Theoretische Betrachtungen über den Reibungswiderstand. Die bisherigen Untersuchungen über Platten- und Rohrströmung führten zu folgenden Ergebnissen.

a) Das Geschwindigkeitsprofil der Reibungsschicht läßt sich stets in der nachstehenden Form darstellen[1]:

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y}{\delta_2}, re\right) \tag{1}$$

(u = Geschwindigkeit in der Reibungsschicht; U = Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht; y = Wandabstand; $\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ = Impulsverlustdicke der Reibungsschicht; $re = U\delta_2/\nu$ = *Reynolds*sche Zahl der Reibungsschicht, gebildet mit der Impulsverlustdicke δ_2; ν = kinematische Zähigkeit).

In (1) ist g eine feste Funktion, die aber natürlich für die Platten-, Rohr- und Kanalströmung je verschieden ist. Die Abhängigkeit u/U von re ist nur gering, d. h. die Geschwindigkeitsprofile für verschiedene re-Zahlen unterscheiden sich nur wenig.

b) Der örtliche Reibungsbeiwert c_f' kann immer in der folgenden Form dargestellt werden:

$$c_f' = F(re) \tag{2}$$

($c_f' = \tau_w/\frac{\varrho}{2}U^2$; τ_w = Wandschubspannung; ϱ = Dichte).

F ist wieder je eine feste Funktion für Platten-, Rohr- und Kanalströmung. Bei der Plattenströmung läßt sich F mittels des Impulssatzes berechnen, wenn g bekannt ist, da hier der gesamte Reibungswiderstand als Impulsverlust in der Reibungsschicht erscheint.

c) Für den wandnahen Teil der Geschwindigkeitsprofile ergab sich ferner die Beziehung

$$\frac{u}{u^*} = f\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) \tag{3}$$

($u^* = \sqrt{\tau_w/\varrho}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit).

Diese Beziehung gilt mit ein und derselben Funktion f sowohl für den wandnahen Teil der Platten- wie für den der Rohr- und Kanalströmung. Für nicht zu kleine $u^* y/\nu$-Werte (voll turbulenter Bereich, $u^* y/\nu > 50$) kann (3) mit großer Genauigkeit durch folgende Näherungsformel ersetzt werden:

$$\frac{u}{u^*} = a \log \frac{u^* y}{\nu} + b, \tag{3a}$$

wobei a und b universelle Konstanten sind. Dieses logarithmische Gesetz läßt sich durch ein Potenzgesetz

$$\frac{u}{u^*} = C\left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n} \tag{3b}$$

annähern, wobei C und n Konstanten sind, die noch ein wenig von dem $u^* y/\nu$-Bereich abhängen, für den die Annäherung besonders gut sein soll.

Wie in der erwähnten Arbeit von *H. Ludwieg* bereits ausgeführt wurde, ist zu erwarten, daß das universelle Gesetz (3) bzw. (3a) außer für die Platten-, Rohr- und Kanalströmung auch bei weit allgemeineren Reibungsschichtströmungen in Wandnähe noch gültig ist. Selbst bei Geschwindigkeitsprofilen, die weit von den Profilen der Plattenströmung abweichen und z. B. bei Strömungen mit starkem Druckanstieg oder -abfall auftreten, kann man annehmen, daß in Wandnähe noch immer das Gesetz (3) bzw. (3a) gilt.

Eine gewisse experimentelle Bestätigung für die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes (3) bzw. (3a) ergibt sich aus der folgenden, von *K. Wieghardt*[2] zuerst festgestellten Tatsache: Wenn man die Reibungsschichtprofile in der Weise $\log u/U$ über $\log y/\delta_2$ aufträgt (Abb. 1), so erhält man für kleine y/δ_2 lauter parallele Geraden. Also ist u in allen Fällen der gleichen Potenz von y proportional. Aus der Neigung der Geraden bestimmt sich diese Potenz zu $0{,}13 = 1/7{,}7$, was für

[1] In dieser Formel haben wir nicht, wie sonst üblich, die mit der Lauflänge, sondern die mit der Impulsverlustdicke δ_2 gebildete *Reynolds*sche Zahl als kennzeichnende Größe gewählt, da dies für Reibungsschichten mit veränderlichem Außendruck zweckmäßiger ist.

[2] *K. Wieghardt*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 146.

den in Frage kommenden $u^* y/\nu$-Bereich gut mit (3b) übereinstimmt. Dies ist jedoch kein zwingender Beweis für die Gültigkeit der Gleichung (3b), da wir durch die Profilmessungen nur die Potenz von y, aber nicht die Konstante C prüfen können, weil u^* unbekannt ist.

Bei Gültigkeit von (3) für den wandnahen Teil der Reibungsschicht hängt u^* und damit τ_w bzw. c_f' nur von dem Geschwindigkeitsprofil und den Stoffkonstanten des strömenden Mediums ab. Es läßt sich daher c_f' berechnen, wenn das Geschwindigkeitsprofil bekannt ist. Eine entsprechende Beziehung zwischen c_f', der *Reynolds*schen Zahl re und einem noch näher zu definierenden Profilparameter soll im folgenden abgeleitet werden.

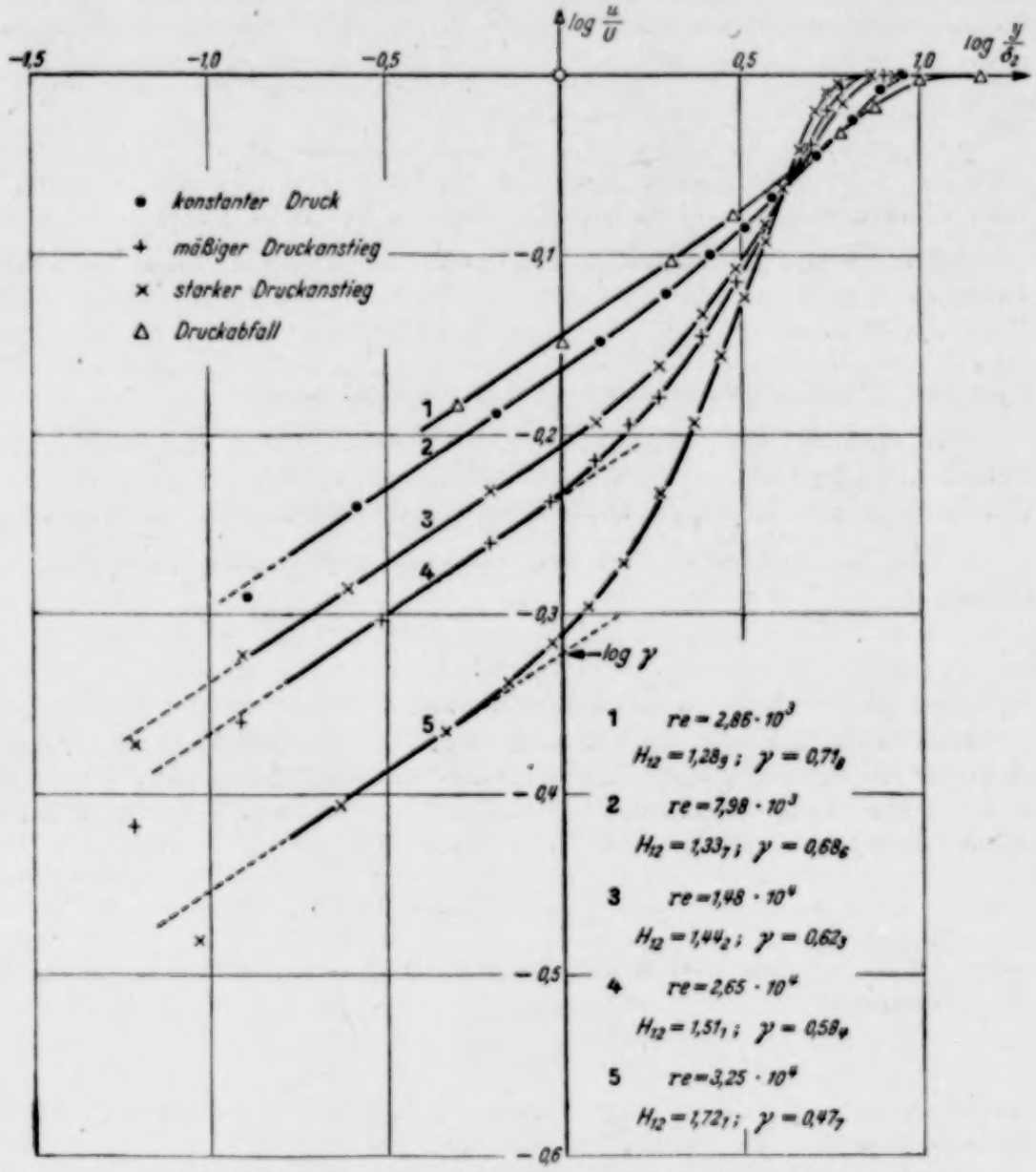


Abb. 1. Einparametrige Schar von Geschwindigkeitsprofilen der Reibungsschichten mit Druckgradienten in dimensionsloser, doppeltlogarithmischer Auftragung.

Als Profilparameter führen wir $\gamma = u_{\delta_2}/U$ ein. Dabei ist u_{δ_2} folgendermaßen definiert: Wenn das Gesetz (3), (3a), (3b) bis zu y-Werten gilt, die größer als δ_2 sind, so ist u_{δ_2} einfach der Wert von u an der Stelle $y = \delta_2$. Gilt dagegen das Gesetz (3), (3a), (3b) nur bis zu y-Werten, die kleiner als δ_2 sind, so ist u_{δ_2} der Wert, den u annehmen würde, wenn das Gesetz (3), (3a), (3b) bis zum Punkt $y = \delta_2$ gelten würde[1]. Man erhält also aus der doppeltlogarithmischen Auftragung von u/U über y/δ_2 (siehe Abb. 1) den Profilparameter γ, indem man den geradlinigen Profilteil bis $y/\delta_2 = 1$ verlängert und den zugehörigen Wert von u_{δ_2}/U abliest.

Zur Ableitung der oben erwähnten Beziehung zwischen c_f', re und γ gehen wir von (3) aus. Zur Einführung des Profilparameters setzen wir hierin $y = \delta_2$ und $u = u_{\delta_2}$. Es ergibt sich dann

$$\frac{u_{\delta_2}}{u^*} = f\left(\frac{u^* \delta_2}{\nu}\right) = f\left(\frac{u_{\delta_2} \delta_2}{\nu} \frac{u^*}{u_{\delta_2}}\right). \tag{4}$$

[1] *E. Gruschwitz*, a. a. O., definierte als Profilparameter die Größe $\eta = 1 - (u_{\delta_2}/U)^2$. Dort ist aber immer unter u_{δ_2} der Wert von u an der Stelle $y = \delta_2$ zu verstehen.

Die Gleichung besagt, daß ein direkter Zusammenhang zwischen $\frac{u^*}{u_{\delta_2}}$ und $\frac{u_{\delta_2}\delta_2}{\nu}$ besteht. Es muß also gelten

$$\frac{u^*}{u_{\delta_2}} = h\left(\frac{u_{\delta_2}\delta_2}{\nu}\right),$$

wobei die Funktion h durch die Funktion f bestimmt ist. Durch Einführen von

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} = U\sqrt{\frac{c_f'}{2}}, \qquad \frac{u_{\delta_2}}{U} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{U\delta_2}{\nu} = re$$

erhält man nach einfacher Umformung

$$c_f' = 2\,\gamma^2\,h^2(re\,\gamma) = \gamma^2\,H(re\,\gamma). \tag{5}$$

Hier ist zur Abkürzung die Funktion $2\,h^2 = H$ gesetzt.

Für alle turbulenten Reibungsschichtprofile, deren wandnaher Teil durch das allgemeine Gesetz (3) dargestellt wird, ist also der Reibungsbeiwert in der Form (5) gegeben. Um in dieser Gleichung nun die Funktion h bzw. H zu bestimmen, könnten wir (4) für den in Frage kommenden Argumentbereich gemäß (3a) durch

$$\frac{u_{\delta_2}}{u^*} = a\log\frac{u^*\delta_2}{\nu} + b = a\log\left(\frac{u_{\delta_2}\delta_2}{\nu}\,\frac{u^*}{u_{\delta_2}}\right) + b$$

ersetzen und diese Gleichung numerisch nach $u^*/u_{\delta_2} = h$ auflösen. Da jedoch die Konstanten a und b in (3a) nicht besonders genau bekannt sind, scheint uns das folgende Verfahren zur Festlegung von H geeigneter.

Nach (1) ist der Profilparameter γ für die Profile der Plattenströmung, den wir mit γ_0 bezeichnen wollen, nur von re abhängig, also $\gamma_0 = \gamma_0(re)$. Setzen wir diesen Wert in (5) ein, so muß uns diese Gleichung den Widerstandsbeiwert c_f' für die Plattenströmung liefern. Unter Berücksichtigung von (2) ergibt sich also für H folgende Funktionalgleichung:

$$\gamma_0^2\,H\,(re\,\gamma_0) = F\,(re)\,, \tag{6}$$

wobei $F\,(re)$ der Reibungsbeiwert der Plattenströmung ist. Diese Gleichung, die für alle re erfüllt sein muß, bestimmt nun bei bekannten Funktionen $F(re)$ und $\gamma_0(re)$ eindeutig die Funktion H. Um diese Funktion H zu ermitteln, setzen wir zur Abkürzung

$$re\,\gamma_0(re) = \xi\,.$$

Hieraus folgt für re durch Iteration die folgende Kettenfunktion:

$$re = \frac{\xi}{\gamma_0\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0(\cdots}\right)}\right.}\,.$$

Durch Einführen dieser Kettenfunktion in (6) ergibt sich

$$H(\xi) = \frac{1}{\gamma_0^2\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0(\cdots}\right)}\right.}\,F\left(\frac{\xi}{\gamma_0\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0\left(\dfrac{\xi}{\gamma_0(\cdots}\right)}\right.}\right).$$

Wenn man nun die Funktion H in (5) durch diesen Ausdruck ersetzt, folgt

$$c_f' = \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2\left(re\dfrac{\gamma}{\gamma_0\left(re\dfrac{\gamma}{\gamma_0(\cdots}\right)}\right.}\,F\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0\left(re\dfrac{\gamma}{\gamma_0(\cdots}\right)}\right). \tag{7}$$

Da sich γ_0 nur wenig mit re ändert (siehe Abb. 2), ist die Konvergenz der Kettenfunktion so gut, daß im ersten Faktor nur das Glied erster Ordnung und im zweiten Faktor das Glied nullter Ordnung berücksichtigt zu werden braucht. Damit erhalten wir

$$c_f' = \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0(re)}\right)}\,F\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0(re)}\right). \tag{8}$$

Diese Formel gibt den Reibungsbeiwert c_f' für allgemeine Reibungsschichten (z. B. mit Druckanstieg oder -abfall) in Abhängigkeit von der *Reynolds*schen Zahl re und dem Profilparameter γ.

Sie wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß in Wandnähe das universelle Gesetz (3) gilt. Die in ihr auftretenden Funktionen F und γ_0 können den experimentellen Untersuchungen der Plattenströmung entnommen werden.

Für eine überschlägige Rechnung genügt es, in (8) diejenigen Funktionen F und γ_0 einzusetzen, die aus der Annahme des bekannten 1/7-Potenzgesetzes für das Geschwindigkeitsprofil folgen. Wegen der Affinität der Profile ist γ_0 hierbei von re unabhängig und kann durch eine einfache Integration berechnet werden, die den Wert $\gamma_0 = 0{,}717$ liefert. Die entsprechende Funktion F mit der von *E. Gruschwitz* angegebenen Zahlenkonstanten lautet

$$c_f' = F(re) = 0{,}0251\, re^{-1/4}\,.$$

Setzt man diese Werte für γ_0 und F in (8) ein, so folgt

$$c_f' = 0{,}0449\, \gamma^{7/4}\, re^{-1/4}\,.$$

Da das 1/7-Potenzgesetz für die Geschwindigkeitsverteilung und das daraus folgende 1/4-Potenzgesetz für den Reibungsbeiwert nur in roher Näherung gilt, ist die eben abgeleitete c_f'-Formel verhältnismäßig ungenau. Eine bessere Anpassung an die tatsächlich auftretenden Widerstandsbeiwerte erreicht man durch eine leichte Änderung der Zahlenkonstanten, wodurch sich folgende Formel ergibt:

$$c_f' = 0{,}0580\, \gamma^{1{,}705}\, re^{-0{,}268}. \tag{9}$$

Mit dieser Formel wird die Gleichung (8) recht gut angenähert, wenn man in dieser für die Funktion F das *Schultz-Grunow*sche Plattenreibungsgesetz (siehe folgenden Abschnitt) und für die Funktion γ_0 den in Abb. 2 dargestellten Verlauf einsetzt. In dem Bereich $1 \cdot 10^3 \leq re \leq 4 \cdot 10^4$ bleiben die Abweichungen kleiner als 3 %.

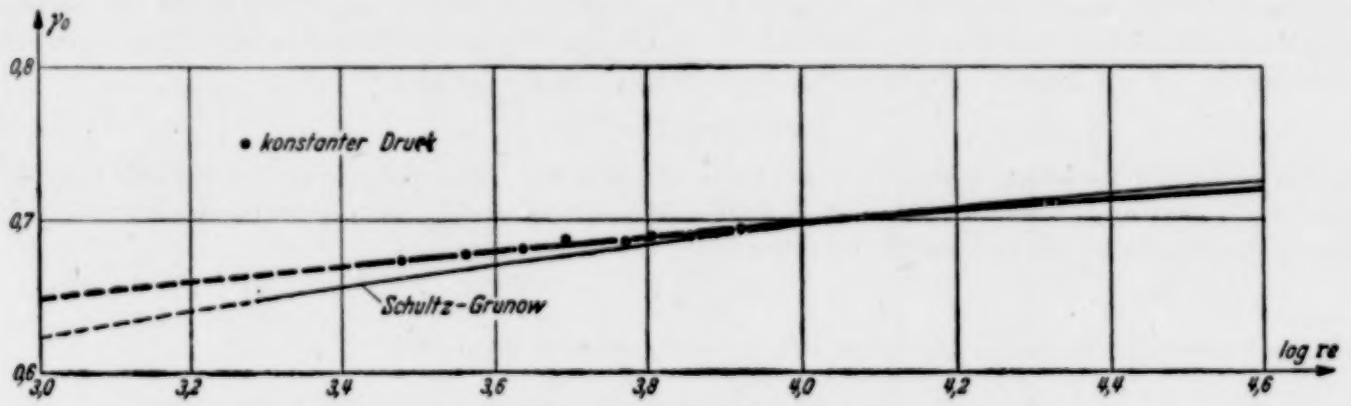


Abb. 2. Profilparameter γ_0 der Plattenströmung als Funktion der *Reynolds*schen Zahl re.

Aus der einfachen Näherungsformel (9) sieht man, daß bei konstantem re der Widerstandsbeiwert c_f' proportional $\gamma^{1{,}705}$ ist. Da bei Reibungsschichten mit Druckanstieg längs der Meßstrecke γ abfällt und re ansteigt, nimmt also c_f' stark ab, was ganz im Gegensatz zu den Ergebnissen von *W. Mangler* und *K. Wieghardt* steht, die hier einen starken Anstieg des c_f'-Wertes festgestellt hatten. Wir sahen uns daher veranlaßt, zur Bestätigung der in diesem Abschnitt für den Reibungsbeiwert c_f' abgeleiteten Beziehung (8) Versuche anzustellen, die im folgenden geschildert werden sollen.

3. Verhalten des Widerstandsbeiwertes in Reibungsschichten mit Druckgradienten. Die Reibungsschichten wurden in der gleichen Meßstrecke von rechteckigem Querschnitt untersucht, die bereits von *F. Schultz-Grunow*[1] beschrieben wurde und nach dem für Reibungsschichtmessungen üblichen Prinzip, das schon in der Einleitung erläutert wurde, gebaut war. Während bei *F. Schultz-Grunow* die verstellbare Wand so eingestellt wurde, daß längs der gesamten Meßstrecke konstanter Druck herrschte, wurde sie hier so eingestellt, daß der gewünschte Druckverlauf zustande kam. An 10—12 Stellen entlang der Mittellinie der ebenen glatten Meßplatte (1,4 mal 6 m) wurden die Geschwindigkeitsprofile der Reibungsschichten ermittelt. An den gleichen Stellen wurde die Wandschubspannung mit Hilfe des bereits erwähnten, neuen, auf thermischer Grundlage beruhenden Meßgerätes von *H. Ludwieg* gemessen. Insgesamt wurden vier verschiedene Meßreihen

[1] *F. Schultz-Grunow*, Lufo 17 (1940) S. 239.

a) bei konstantem Druck in Strömungsrichtung (Plattenströmung),
b) bei mäßigem Druckanstieg,
c) bei starkem Druckanstieg,
d) bei Druckabfall

durchgeführt.

Bevor die Messungen ausgeführt wurden, ist das Schubspannungsmeßgerät in der folgenden Weise geeicht worden. Der Kanal wurde auf Plattenströmung eingestellt und das Meßgerät an zwei verschiedenen Stellen der Meßplatte eingebaut. Zur Aufnahme der Eichkurve wurde jedesmal der gesamte Geschwindigkeitsbereich der Versuchsanlage durchfahren. Hierbei wurde jeweils die zugehörige Eichschubspannung mittels des Reibungsgesetzes für die Plattenströmung ermittelt. Aus den vorliegenden Näherungsformeln für den Widerstandsbeiwert der Plattenströmung haben wir die von *F. Schultz-Grunow* aufgestellte[1]

$$c_f' = \frac{0{,}0334}{(\log re)^{1{,}838}}$$

verwendet, da diese an Messungen in derselben Versuchseinrichtung gewonnen wurde. Anschließend haben wir dann zur Kontrolle bei konstant gehaltener Geschwindigkeit die Wandschubspannung mit dem geeichten Meßgerät entlang der gesamten Versuchsstrecke gemessen.

Aus den gleichzeitig gemessenen Geschwindigkeitsprofilen wurde die Funktion $\gamma_0 = \gamma_0(re)$, die wir bei der Prüfung von (8) brauchen, ermittelt. Sie ist in Abb. 2 über log *re* aufgetragen. In der gleichen Abbildung ist das aus den *Schultz-Grunow*schen Messungen ermittelte γ_0 eingezeichnet. Unsere Meßpunkte liegen bei kleinen *re*-Zahlen etwas oberhalb der *Schultz-Grunow*schen Kurve. Den späteren Auswertungen haben wir die stark ausgezogene Kurve zugrundegelegt.

In Abb. 3a ist für die vier verschiedenen Meßreihen der Widerstandsbeiwert c_f' über der *re*-Zahl doppeltlogarithmisch aufgetragen. Zum Vergleich ist das Reibungsgesetz von *Schultz-Grunow* mit eingezeichnet. Die Meßpunkte der zur Kontrolle durchgeführten Meßreihe bei konstantem Druck (Plattenströmung) fallen mit der *Schultz-Grunow*schen Kurve zusammen und bestätigen damit die Richtigkeit der Eichmessung. Die beiden Meßreihen bei mäßigem bzw. starkem Druckanstieg ergeben am Ende der Meßstrecke c_f'-Werte, die erheblich unterhalb der *Schultz-Grunow*schen Kurve für die Plattenströmung liegen. Dies bedeutet also, daß die Annahme eines nur von *re* abhängigen c_f'-Wertes, die *A. Buri*, *E. Gruschwitz*, *H. B. Squire* und *A. D. Young*[2], *A. Kehl*, *A. E. v. Doenhoff* und *N. Tetervin*[3] ihren Berechnungsverfahren für turbulente Reibungsschichten mit Druckgradienten zugrundegelegt haben, nicht zutrifft. Erst recht wird das Ergebnis der Untersuchungen von *W. Mangler* und *K. Wieghardt* widerlegt, die bei Reibungsschichten in verzögerter Strömung nach einer gewissen Anlaufstrecke in Strömungsrichtung ein erhebliches Ansteigen des c_f'-Wertes festgestellt hatten. In der Abbildung sind noch die Meßpunkte der Versuchsreihe bei Druckabfall eingetragen. Diese Punkte liegen ein wenig oberhalb der *Schultz-Grunow*schen Kurve.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Prüfung von (8) über. Zur Vereinfachung der Schreibweise dieser Gleichung führen wir noch folgende Abkürzung ein:

$$\gamma_0\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0(re)}\right) = \bar{\gamma}_0 .$$

Wenn wir (8) dann in die nachstehende Form bringen

$$c_f'\left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\gamma}\right)^2 = F\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0(re)}\right), \tag{8a}$$

so besteht zwischen den beiden Ausdrücken $c_f'(\bar{\gamma}_0/\gamma)^2$ und $re\,\gamma/\gamma_0(re)$ der gleiche funktionale Zusammenhang wie zwischen den Größen c_f' und *re* bei der Plattenströmung. Wir haben daher in Abb. 3b $\log\left[c_f'\left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\gamma}\right)^2\right]$ über $\log\left(re\,\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)$ aufgetragen und das Plattengesetz von *Schultz-Grunow*

---

[1] In der Arbeit von *F. Schultz-Grunow* ist c'_f als Funktion der mit der Lauflänge x gebildeten *Reynolds*schen Zahl angegeben. Wir haben diese Formel auf die mit der Impulsverlustdicke δ_2 gebildete *Reynolds*sche Zahl *re* umgerechnet.

[2] *H. B. Squire* and *A. D. Young*, The calculation of the profile drag of aerofoils. Tech. Rep. of the Aeron. Res. Comm., R. and M. No. 1838 (1938).

[3] *A. E. v. Doenhoff* and *N. Tetervin*, Determination of general relations for the behaviour of turbulent boundary layers. NACA Rep. No. 772 (1943).

mit eingezeichnet. Bei Richtigkeit unserer Gleichung (8) müssen jetzt die Punkte sämtlicher Meßreihen auf die eingezeichnete Kurve fallen. Die Punkte der Meßreihe mit konstantem Druck wurden einfach aus Abb. 3a übertragen, da sich eine Umrechnung erübrigt. Die Punkte der restlichen Meßreihen liegen befriedigend auf der Kurve von *Schultz-Grunow*. Insbesondere fallen die Meßpunkte der Versuchsreihen mit Druckanstieg, die zu erheblich kleineren c_f'-Werten als den entsprechenden Werten der Plattenströmung geführt hatten, gut mit der *Schultz-Grunow*schen Kurve zusammen, womit unsere Gleichung (8) auf das beste bestätigt wird. Lediglich die umgerechneten Punkte der Reihe mit Druckabfall liegen ein wenig unterhalb der eingezeichneten Kurve. Dies braucht kein Versagen unserer Gleichung (8) zu bedeuten, da das Gesetz von *Schultz-Grunow* bei kleinen *re*-Zahlen ziemlich unsicher ist, was aus dem Vergleich mit Näherungsformeln anderer Verfasser [1], [2], [3], [4], [5] hervorgeht, die hier von der *Schultz-Grunow*schen Kurve um die gleiche Größenordnung abweichen wie unsere Meßpunkte.

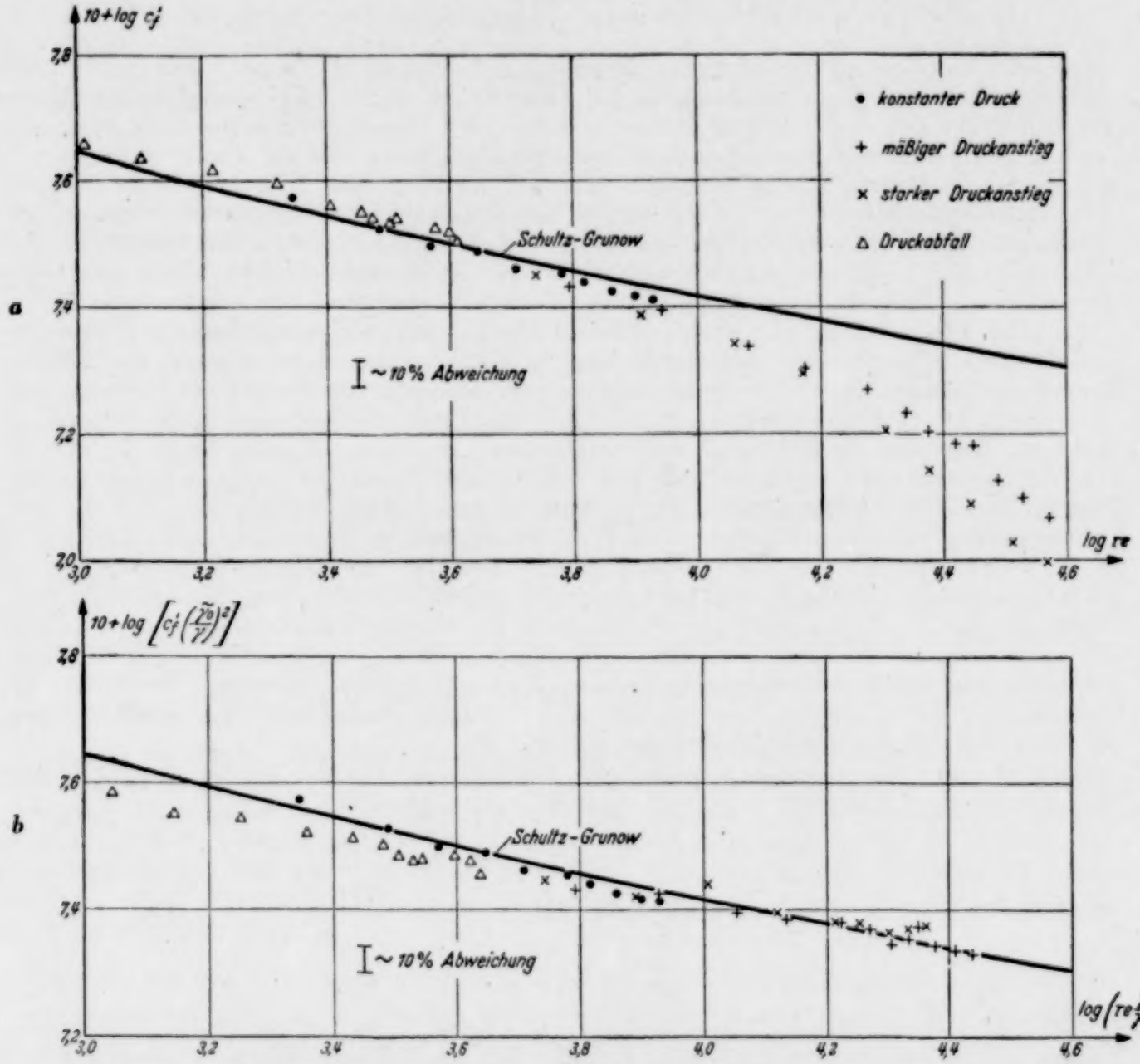


Abb. 3. Widerstandsbeiwerte c'_f in den Reibungsschichten mit Druckgradienten

a) Auftragung von c'_f über re, b) Auftragung von $c'_f\left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\gamma}\right)^2$ über $re\,\frac{\gamma}{\gamma_0}$ nach (8a).

---

[1] *L. Prandtl*, Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebn. d. AVA. Göttingen, IV. Lieferung (1932), S. 18.

[2] *K. E. Schoenherr*, Trans. Soc. Naval Architects and Marine Eng. 40 (1932) S. 279.

[3] *H. B. Squire* and *A. D. Young*, a. a. O.

[4] *J. Nikuradse*, Turbulente Reibungsschichten an der Platte. ZWB. 1942.

[5] *V. M. Falkner*, Aircr. Eng. 15 (1943) S. 65.

Aus unserer Gleichung (8) (oder einfacher nach der Näherungsgleichung (9) einzusehen) folgt, daß mit Annäherung an die Ablösestelle einer turbulenten Reibungsschicht ($\gamma \longrightarrow 0$) der Widerstandsbeiwert c_f' gegen Null geht. Kurz vor der Ablösestelle müssen daher sehr kleine c_f'-Werte auftreten, die wir mit der Meßreihe bei starkem Druckanstieg nachzuweisen versucht haben. Dabei erreichten wir einen c_f'-Wert von 0,0010 anstatt eines c_f' von 0,0020 bei der Plattenströmung mit gleicher *re*-Zahl. Noch kleinere Widerstandsbeiwerte ließen sich in der verwendeten Versuchseinrichtung nicht einwandfrei messen, da die Versuchsströmung in den Ecken des Kanalquerschnittes vorher abriß.

Bei der Ableitung von (8) wurde vorausgesetzt, daß das universelle Gesetz (3) für den wandnahen Teil der Geschwindigkeitsprofile in der Reibungsschicht auch bei allgemeinen Reibungsschichten gültig ist. Es müssen also alle Profile in der Auftragung u/u^* über $\log u^* y/\nu$ in Wandnähe zusammenfallen. Dieses Verhalten wird an einigen, beliebig aus den vier Meßreihen ausgewählten Profilen in Abb. 4 gut bestätigt. Die hierzu notwendigen Schubspannungsgeschwindig-

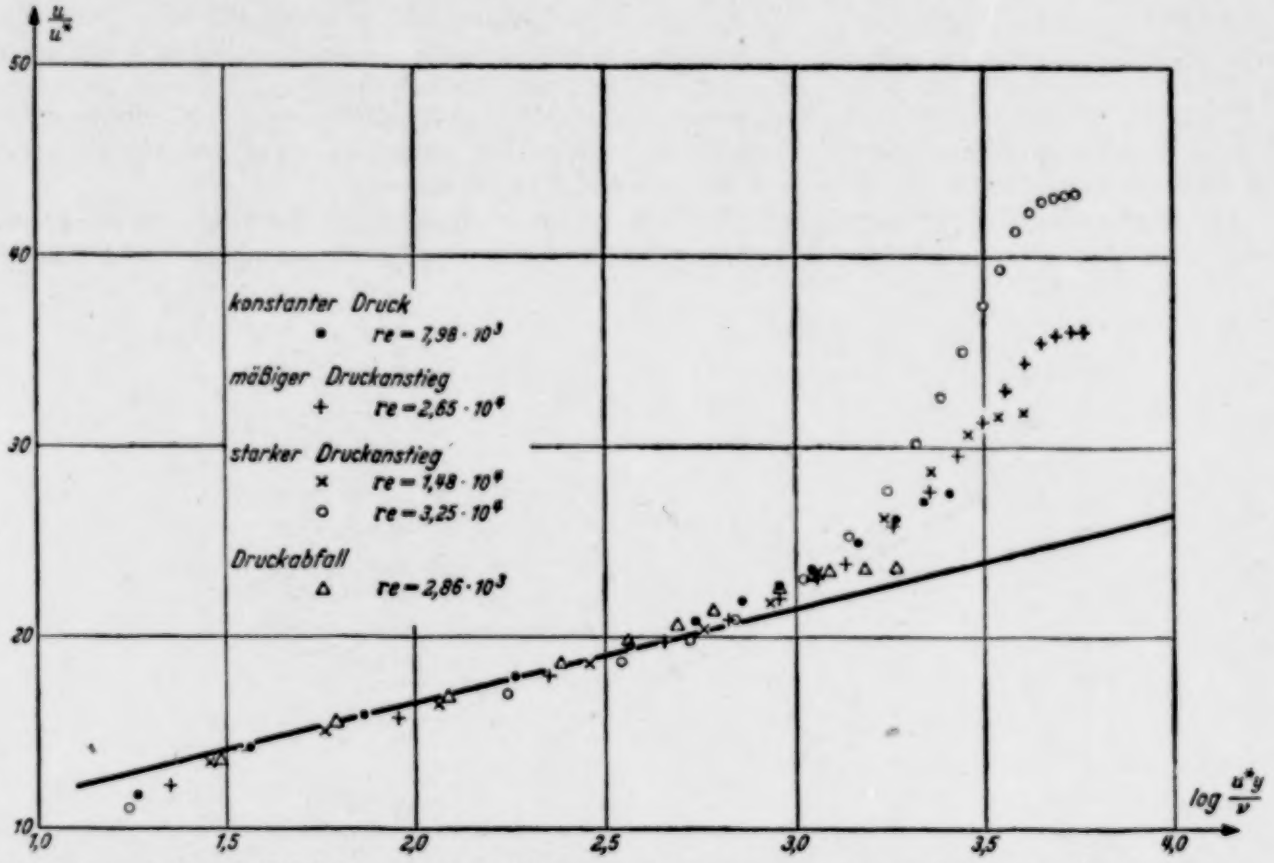


Abb. 4. Einige Geschwindigkeitsprofile von Reibungsschichten mit Druckgradienten mit universellem Gesetz (3a) in Wandnähe.

keiten u^* wurden aus den thermisch gemessenen c_f'-Werten ermittelt. In dieser halblogarithmischen Auftragung ist der zusammenfallende wandnahe Profilteil wegen (3a) eine Gerade. Lediglich die wandnächsten Meßpunkte liegen ein wenig unterhalb dieser Geraden, da sie nicht mehr im voll turbulenten Bereich des Geschwindigkeitsprofiles, sondern schon im Übergangsgebiet zur laminaren Unterschicht liegen (siehe die Messungen von *H. Reichardt*[1]). Wie man sieht, wird die Profilform in dieser Darstellung durch Druckanstieg bzw. -abfall nur im wandfernen Teil beeinflußt.

4. Einparametrigkeit der turbulenten Reibungsschichtprofile. Die von *E. Gruschwitz* gefundene Einparametrigkeit der turbulenten Geschwindigkeitsprofile bei beliebigem Druckverlauf, die auch aus Abb. 1 zu erkennen ist, wurde von verschiedenen Autoren (*A. Kehl, K. Wieghardt, A. E. v. Doenhoff* und *N. Tetervin*) immer wieder gut bestätigt, jedoch nicht erklärt. An Hand der Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte können wir nun aber den Grund für die angenäherte Einparametrigkeit einsehen.

Wie wir in Abb. 4 gesehen haben, fallen in der Auftragung u/u^* über $u^* y/\nu$ (bzw. $\log u^* y/\nu$) sämtliche Reibungsschichtprofile in Wandnähe zusammen. Hieraus geht nun die Auftragung u/U über y/δ_2, in der nach *Gruschwitz* sämtliche Profile eine einparametrige Schar bilden sollen,

[1] *H. Reichardt*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 297.

durch affine Verzerrung der Ordinate mit u^*/U und der Abszisse mit $\nu/u^*\delta_2$ hervor. Da die beiden Größen u^*/U und $\nu/u^*\delta_2$ voneinander unabhängig sind, sollte man erwarten, daß schon der wandnahe Teil des Geschwindigkeitsprofiles in der Auftragung u/U über y/δ_2 zweiparametrig wird. Nun kann man aber das allgemeine Geschwindigkeitsgesetz (3), das für den in Abb. 4 zusammenfallenden wandnahen Profilteil gilt, durch ein einfaches Potenzgesetz (3b) außerhalb der laminaren Unterschicht annähern. Ein Potenzgesetz geht bei beliebigen, voneinander unabhängigen affinen Verzerrungen in Ordinaten- und Abszissenrichtung stets wieder in Potenzgesetze mit gleichem Exponenten über, die eine einparametrige Profilschar in Wandnähe ergeben.

Der anschließende Teil des Geschwindigkeitsprofiles, in dem sich die Geschwindigkeit nur noch langsam ändert, ist bei gegebenem wandnahen Teil weitgehend festgelegt, da der Anschluß stetig und mit stetigen Ableitungen erfolgen, das Profil sich asymptotisch dem Wert $u/U=1$ annähern und das Integral

$$\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta_2}\right) = 1$$

(Definition der Impulsverlustdicke) sein muß.

Hiermit ist die angenäherte Einparametrigkeit für das ganze Geschwindigkeitsprofil verständlich gemacht. Diese Einparametrigkeit bezieht sich jedoch nur auf den turbulenten Teil des Profiles und schließt die laminare Unterschicht nicht mit ein.

Da wegen der Einparametrigkeit sich die Geschwindigkeitsprofile durch einen beliebigen Parameter eindeutig kennzeichnen lassen, muß zwischen zwei Profilparametern ein eindeutiger

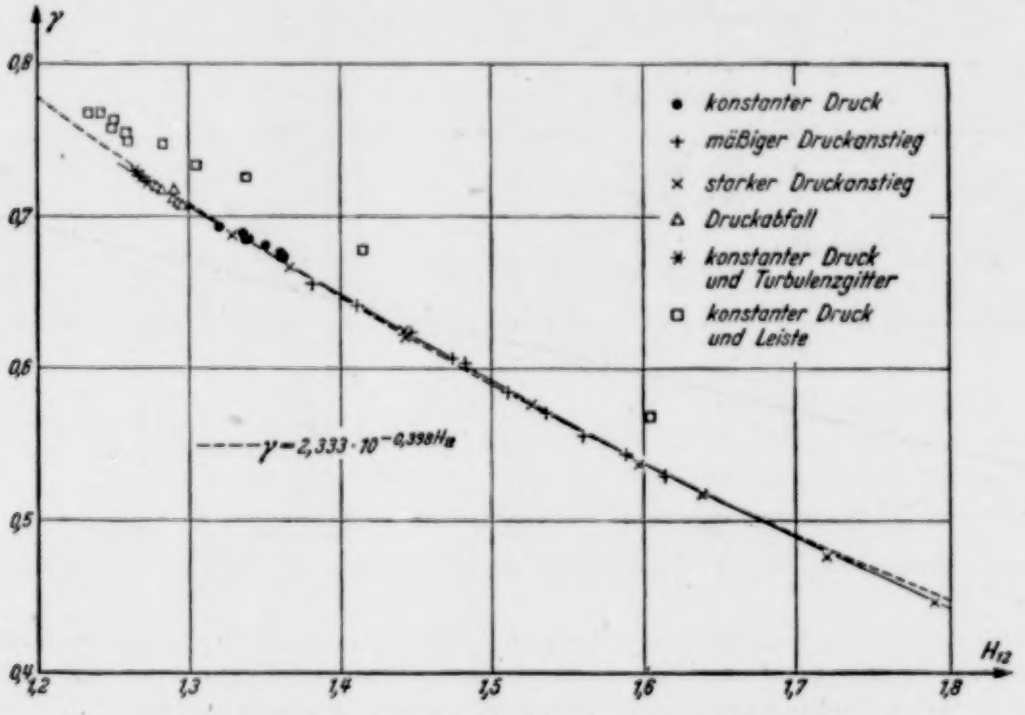


Abb. 5. Zusammenhang zwischen den beiden Profilparametern γ und H_{12}.

Zusammenhang bestehen. Dieser ist in Abb. 5 für γ und die Größe H_{12} dargestellt, wobei H_{12} das Verhältnis von der Verdrängungsdicke[1] δ_1 zur Impulsverlustdicke δ_2 ist. In dieser Abbildung liegen die Meßpunkte, die den verschiedensten Profilen aus allen Meßreihen entsprechen, recht gut auf einer Kurve (mit Ausnahme der Versuchsreihe „konstanter Druck und Leiste", siehe folgenden Abschnitt), womit die Einparametrigkeit auf das beste bestätigt wird. H_{12} ist deshalb ein zweckmäßiger Profilparameter, weil diese Größe in den Rechenverfahren für turbulente Reibungsschichten häufig verwendet wird, und es liegt nahe, sie an Stelle von γ in die Gleichung (9) einzuführen. Der in Abb. 5 dargestellte Zusammenhang zwischen γ und H_{12} läßt sich durch folgende empirische Formel annähern:

$$\gamma = 2{,}333 \cdot 10^{-0{,}398\, H_{12}}.$$

[1] Verdrängungsdicke $\delta_1 = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right) dy$.

Durch Einführen dieser Beziehung in (9) erhalten wir die Näherungsformel

$$c_f' = 0{,}246 \cdot 10^{-0{,}678\, H_{12}}\, re^{-0{,}268}, \qquad (9\,a)$$

die die Widerstandsbeiwerte c_f' in Abhängigkeit vom Profilparameter H_{12} und der *Reynolds*schen Zahl re gut wiedergibt.

5. Anwendungsbereich der gefundenen Gesetzmäßigkeiten. Nachdem die Ergebnisse, die in den vorhergehenden Abschnitten gefunden wurden, sich bei Reibungsschichten mit Druckanstieg und -abfall durchaus bewährt haben, wollen wir jetzt prüfen, inwieweit die abgeleiteten Beziehungen bei irgendwelchen Störungen der Reibungsschichtströmung noch gültig bleiben. Dazu haben wir noch zwei zusätzliche Meßreihen

e) bei konstantem Druck und Turbulenzgitter,

f) bei konstantem Druck und Leiste

durchgeführt. Für die Messung der ersten Versuchsreihe wurde ein bereits von *K. Wieghardt*[1] beschriebener Versuchsaufbau verwendet. Dabei war vor der Kanaldüse ein aus Blechstreifen angefertigtes, grobes Gitter angebracht, das die Turbulenz des Luftstromes beträchtlich erhöhte (Erniedrigung der kritischen Kugelkennzahl UD/ν von $3{,}75 \cdot 10^5$ auf $1{,}3 \cdot 10^5$). Der weitere Versuchsablauf war der gleiche wie bei der Meßreihe mit konstantem Druck (a). In Abb. 6a ist wieder

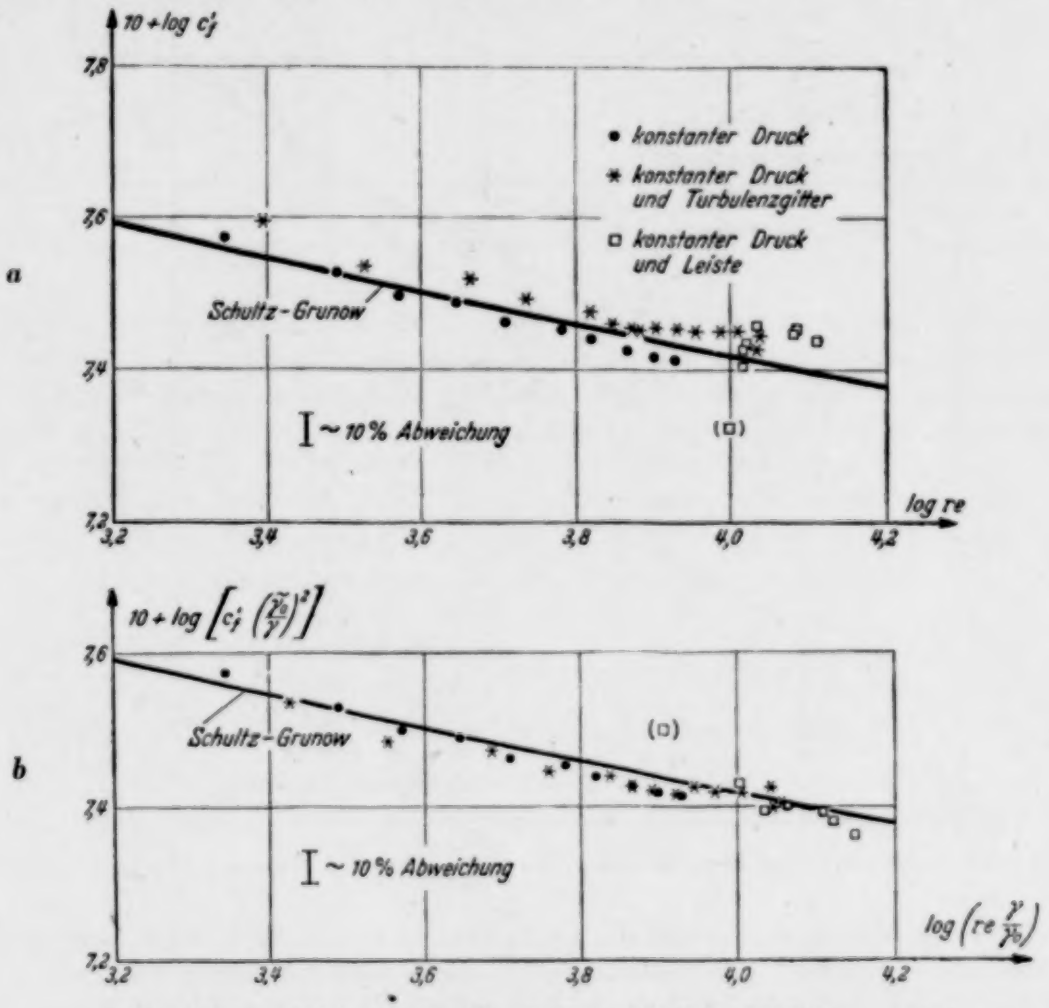


Abb. 6. Widerstandsbeiwerte c'_f in den Reibungsschichten der Meßreihen e und f

a) Auftragung von c'_f über re, b) Auftragung von $c'_f \left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\gamma}\right)^2$ über $re\,\frac{\gamma}{\gamma_0}$ nach (8a).

das gemessene c_f' über der re-Zahl doppeltlogarithmisch aufgetragen. In die gleiche Abbildung sind das *Schultz-Grunow*sche Gesetz und zum Vergleich die Meßpunkte der Versuchsreihe bei konstantem Druck mit eingezeichnet. Wie wir erkennen, ist hier durch die erhöhte Turbulenz der Außenströmung der Reibungsbeiwert gegenüber der Plattenströmung im Mittel um ca. 10 % erhöht. In Abb. 6b ist entsprechend der Abb. 3b wieder $c_f'(\bar{\gamma}_0/\gamma)^2$ über $re\ \gamma/\gamma_0$ doppeltlogarith-

[1] *K. Wieghardt*, Z. angew. Math. Mech. 24 (1944) S. 294.

misch aufgetragen. Die Meßpunkte dieser Versuchsreihe fallen dann mit den Meßpunkten der Plattenströmung zusammen, wodurch auch die Anwendbarkeit unserer Gleichung (8) auf derartig stark turbulente Strömungen erwiesen ist.

Im Gegensatz zur soeben besprochenen Meßreihe e), wo die Reibungsschicht vom Außenrand her gestört wurde, wurde sie bei der Meßreihe f) von der Wand her gestört. Dazu wurde auf der Meßplatte quer zur Strömungsrichtung eine durchgehende Vierkantleiste (13 mal 13 mm) in einer Entfernung $x = 3$ m von der Plattenvorderkante angebracht. Die Dicke der Reibungsschicht betrug an dieser Stelle ca. 60 mm. In verschiedenen Abständen hinter der Leiste wurden wieder Geschwindigkeitsprofile und Wandschubspannungen gemessen. In Abb. 6a sind die Meßwerte für c_f' eingezeichnet. In kürzeren Abständen hinter der Leiste liegen die Meßpunkte naturgemäß tiefer als bei der Plattenströmung. Mit zunehmender Entfernung steigen dann die c_f'-Werte steil auf größere Werte als bei der Plattenströmung an und fallen bis zum Ende der Meßstrecke noch nicht bis zu den Werten der Plattenströmung ab. Die gegen die Plattenströmung erhöhten c_f'-Werte sind durch die verstärkte Turbulenz bedingt, die durch die Ablösung an der Leiste verursacht wird. In Abb. 6b sind die entsprechend (8a) umgerechneten c_f'-Werte eingetragen. Der erste Punkt dicht hinter der Leiste fällt nicht auf die Kurve des Plattengesetzes, während schon nach größenordnungsmäßig zehn Reibungsschichtdicken die Meßpunkte die Gleichung (8) wieder einwandfrei erfüllen.

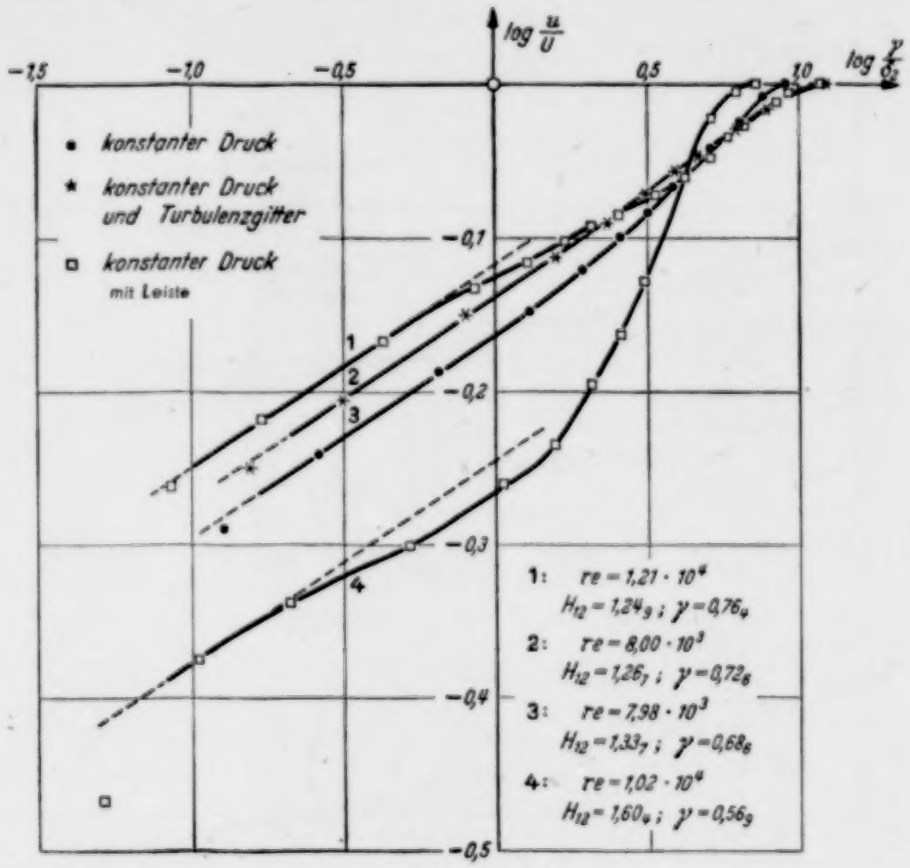


Abb. 7. Einige Geschwindigkeitsprofile der Meßreihen *e* und *f* in dimensionsloser, doppeltlogarithmischer Auftragung.

Der Grund für das Versagen der Gleichung (8) für die ersten Meßpunkte liegt darin, daß die stets vorausgesetzte Gültigkeit der Gleichung (3) in Wandnähe durch die Leiste gestört ist. Zur Bestätigung dieser Tatsache sind in Abb. 7 entsprechend der Abb. 1 einige Profile dargestellt. Profil Nr. 4 ist ein kurz hinter der Leiste gemessenes Profil. Ein Vergleich mit Abb. 1 zeigt, daß hier in Wandnähe das Gesetz (3) nicht mehr gilt. Außerdem sieht man, daß das Profil aus der einparametrigen Schar herausfällt. Profil Nr. 1 ist in dem Bereich gemessen, wo (8) wieder zutrifft. Wir erkennen den geradlinigen Verlauf mit derselben Neigung wie in Abb. 1 entsprechend der Gültigkeit von (3). Zum Vergleich ist das Plattenprofil aus Abb. 1 übertragen. Ferner ist in Abb. 7 ein Profil der Meßreihe mit Turbulenzgitter eingezeichnet, welches wiederum die Gültigkeit von (3) zeigt, wie es nach obigen Ausführungen nicht anders zu erwarten war.

In Abb. 8 sind aus den letzten Meßreihen einige Profile, für die (8) wieder gilt, entsprechend der Abb. 4 aufgetragen und zum Vergleich ein Profil der Plattenströmung mit eingezeichnet. Wir erkennen auch hier wieder, daß alle eingezeichneten Profile in Wandnähe Gleichung (3) erfüllen.

6. Zusammenfassung. Veranlaßt durch die unbefriedigenden Kenntnisse des Verhaltens der Wandschubspannung in Reibungsschichten mit Druckgradienten wurde diese Aufgabe erneut behandelt. Es wurde gezeigt, daß bei allgemeinen turbulenten Reibungsschichten in Wandnähe, d. h. in der laminaren Unterschicht, im Übergangsgebiet und im wandnahen Teil des voll turbulenten Bereiches, das gleiche universelle Geschwindigkeitsgesetz wie bei der Plattenströmung gilt. Aus der allgemeinen Gültigkeit dieses Gesetzes wurde eine Formel für den örtlichen Widerstandsbeiwert c_f' abgeleitet, in der c_f' nur von der mit der Impulsverlustdicke gebildeten *Reynolds*schen Zahl *re* und einem Profilparameter γ abhängt. Diese Gesetzmäßigkeit wurde durch mehrere Versuchsreihen, bei denen die Wandschubspannung mit Hilfe eines neuen Meßgerätes unmittelbar gemessen wurde, gut bestätigt. Man kann also allein aus der Kenntnis des Geschwindigkeitsprofiles den zugehörigen Reibungsbeiwert c_f' bestimmen.

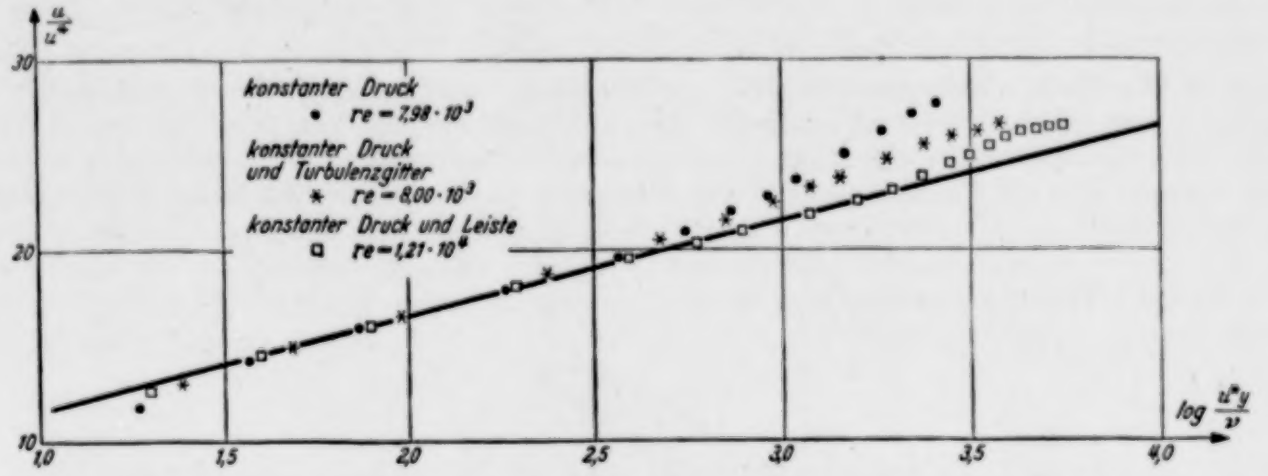


Abb. 8. Einige Geschwindigkeitsprofile der Meßreihen *e* und *f* mit universellem Gesetz (3a) in Wandnähe.

Aus der Formel für c_f' folgt in Übereinstimmung mit den Versuchen, daß bei Reibungsschichten mit Druckanstieg bzw. -abfall kleinere bzw. größere c_f'-Werte als bei der Plattenströmung gleicher *re*-Zahl auftreten. Es lassen sich also bei größeren *Reynolds*schen Zahlen kleine örtliche Widerstandsbeiwerte c_f' nicht nur durch Laminarerhaltung der Grenzschicht, sondern auch durch geeigneten Druckverlauf in turbulenten Reibungsschichten erreichen. Das von verschiedenen Bearbeitern festgestellte Ansteigen des Reibungsbeiwertes auf ein Mehrfaches des Beiwertes der Plattenströmung in Reibungsschichten mit Druckanstieg ist durch diese Untersuchung widerlegt.

Max Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

(Eingegangen am 11. August 1948.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *Hubert Ludwieg*, Dipl. Phys. *Walter Tillmann*,
(20b) Göttingen, Böttingerstraße 6/8.

Über Werkstoffdämpfung bei Biegeschwingungen*.

Von G. Denkhaus.

1. Einleitung. Wenn man den Resonanzausschlag eines schwingend beanspruchten Bauteils vorausberechnen will, so scheitert diese Aufgabe häufig daran, daß man die Dämpfung quantitativ nicht hinreichend kennt. Nun entfällt ja bekanntlich ein beachtlicher Anteil der gesamten Dämpfung auf die Werkstoffdämpfung, und es wäre somit schon ein Fortschritt, wenn es gelänge, den Resonanzausschlag wenigstens unter Berücksichtigung der Werkstoffdämpfung zu errechnen.

Unter der Werkstoffdämpfung versteht man ja die Erscheinung, daß ein Teil der bei Schwingungsbeanspruchung in einen Bauteil hineingesteckten Formänderungsenergie durch nicht reversible Vorgänge im Werkstoff in Wärme umgesetzt wird.

2. Kenngrößen. Will man die Werkstoffdämpfung zahlenmäßig erfassen und damit der Rechnung zugänglich machen, so muß man sich zunächst über die festzusetzenden Kenngrößen klar werden. Naheliegend ist es, die absolute Dämpfungsarbeit S in (cm kg) zu nehmen, die während einer Schwingungsperiode in Wärme umgesetzt wird. Ein Maß für diese Arbeit ist bekanntlich der Flächeninhalt der Hysteresisschleife, die von der Kraft-Verformungsweg-

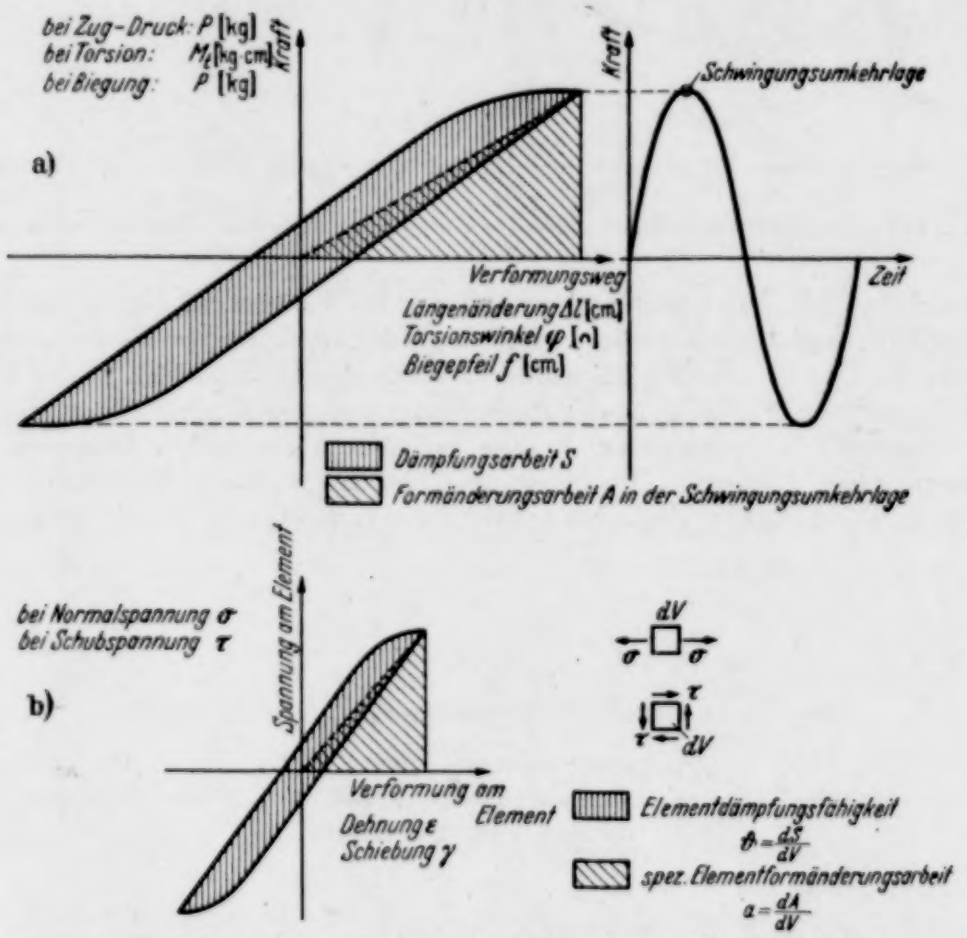


Abb. 1. Hysteresisschleife bei Schwingungsbeanspruchung a) für einen Bauteil b) für ein Volumenelement dV.

Kurve im Verlauf einer Schwingungsperiode beschrieben wird (Abb. 1a). Experimentell hat sich ergeben, daß diese Dämpfungsarbeit von folgenden Faktoren abhängig ist:

1. dem Werkstoff,
2. der Beanspruchungsart (Zug-Druck oder Torsion oder Biegung),
3. der Amplitude der Beanspruchung,
4. der Form und Größe des Schwingers,
5. sonstigen Faktoren, wie Temperatur, Vorgeschichte des Werkstoffs usw., die für die vorliegende Betrachtung nicht wesentlich sind.

* Die Arbeit entstand aus einer Anregung von Herrn Professor Dr. *K. Klotter* und wurde im Mai 1948 auf der Tagung der Fachausschüsse für Schwingungs- und Schalltechnik des VDI. in Stuttgart vorgetragen.

Wählt man die Dämpfungsarbeit S als Kenngröße, so stört vor allem die Tatsache, daß sie von Form und Größe des Bauteils abhängig ist. Man braucht also eine Unmenge langwieriger Versuche, um sie zu erfassen. Es gelingt aber auch, eine Kenngröße zu definieren, die den störenden Einfluß nicht aufweist, und zwar auf folgende Weise: Man erstreckt die Betrachtung nicht auf den ganzen Schwinger, sondern auf ein beliebig kleines Element desselben. In einem solchen Element wird die Dämpfungsarbeit dS in (cm kg) vernichtet. Diese Elementdämpfungsarbeit ist im wesentlichen von den gleichen Faktoren abhängig wie die Gesamtarbeit S, nur ist zu Punkt 2 und 3 zu bemerken, daß hierher die Amplitude der Beanspruchung des Elements zu setzen ist, gemessen durch Spannung oder Formänderung, und daß ferner unter Beanspruchungsart nunmehr die beiden Typen Normal- und Schubspannung zu verstehen sind. Hinsichtlich Punkt 4 entfällt der Einfluß der Form, von der man bei einem beliebig kleinen Element ja nicht mehr sprechen kann. Es bleibt allerdings noch der Einfluß der Größe, beschrieben durch das Volumen dV des Elements, bestehen.

Den Einfluß des Volumens kann man nun aber eliminieren, indem man mit dem Quotienten dS/dV arbeitet. Dieser Quotient ϑ in (cm kg/cm^3) ist somit eine nur von Werkstoff und Beanspruchung abhängige Größe und heißt Elementdämpfungsfähigkeit. Sie wird veranschaulicht durch den Inhalt der Hysteresisschleife, die von der Spannungs-Verformungs-Kurve für das betrachtete Element bei einer Schwingungsperiode durchfahren wird (Abb. 1b).

Man kann aus der Elementdämpfungsfähigkeit ϑ eine dimensionslose Größe ableiten, indem man sie auf die aus der Festigkeitslehre bekannte spezifische Formänderungsarbeit $a = dA/dV$ bezieht. Hierbei ist dA die Formänderungsarbeit, die in der Schwingungsumkehrlage in dem Element aufgespeichert ist (vgl. Abb. 1a). Die neu definierte Größe heißt Elementdämpfung:

$$\psi = \frac{\vartheta}{a} = \frac{dS}{dA} . \tag{1}$$

Analog dazu kann man auch zu der gesamten Dämpfungsarbeit S eine dimensionslose Größe definieren, indem man sie auf die im ganzen Bauteil in der Schwingungsumkehrlage aufgespeicherte Formänderungsenergie A bezieht. Diese Kenngröße heißt Nenndämpfung und gibt an, welcher Bruchteil der Formänderungsenergie im Bauteil durch Dämpfung vernichtet wird:

$$\psi_n = \frac{S}{A} . \tag{2}$$

Man muß also grundsätzlich zwei Größen unterscheiden: die Werkstückkenngröße ψ_n und die Werkstoffkenngröße ψ. Daß im allgemeinen ein Unterschied zwischen den beiden Größen besteht, liegt daran, daß die Spannungsverteilung im Bauteil meist nicht gleichmäßig ist und somit auch nicht alle Elemente gleichmäßig zur Gesamtdämpfungsarbeit beitragen.

Ermittelt man die Werkstoffdämpfung experimentell, so erhält man stets eine Nenndämpfung, denn auch ein Probestab ist ja ein Bauteil mit bestimmter Form und Größe. Die Ermittlung geschieht entweder durch Dauerversuche mit Dämpfungsmessung oder durch Ausschwingversuche. Die letztgenannte Methode ist recht bequem, denn bei schwacher Dämpfung besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen dem bekannten logarithmischen Dekrement der Ausschläge $\mathfrak{d} = \ln Q_k - \ln Q_{k+1}$ und der Nenndämpfung ψ_n, die man als das logarithmische Dekrement der Formänderungsenergien bezeichnen kann. Es gilt[1]:

$$\psi_n \approx 2\,\mathfrak{d} . \tag{3}$$

3. Einfluß der Beanspruchung. Wie schon betont, ist die Werkstoffdämpfung keine Konstante, sondern im allgemeinen von der Beanspruchung abhängig. Wenn man diese Abhängigkeit durch sogenannte Dämpfungskurven darstellt, pflegt man die Beanspruchungsamplitude durch eine Verformungsgröße auszudrücken, also bei Normalspannung durch die Dehnungsamplitude ε und bei Schubspannung durch die Schiebungsamplitude γ.

Es ist natürlich erwünscht, diese Kurven in Formeln zu fassen. Die experimentellen Befunde haben ergeben, daß man sie durch Potenzfunktionen von folgender Form darstellen kann:

$$\psi_{\text{Normal}} = \alpha\,\varepsilon^{\beta} \quad \text{bzw.} \quad \psi_{\text{Schub}} = \alpha^{*}\,\gamma^{\beta^{*}} . \tag{4a}$$

Hierbei sind α und β bzw. α^{*} und β^{*} reine Werkstoffkonstanten. Die Werkstoffdämpfung ist somit einer Potenz des Ausschlags proportional, man darf ihre Kenngrößen also nicht ohne

[1] *O. Föppl, E. Becker* u. *G. v. Heydekampf*, Die Dauerprüfung der Werkstoffe. Berlin 1929.

weiteres in die bekannten Schwingungsdifferentialgleichungen für geschwindigkeitsproportionale Dämpfung einführen.

Bei Bauteilen, in denen die Beanspruchung sich von Element zu Element ändert, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, als „Nenngröße" die Beanspruchung der am stärksten verformten Elemente anzugeben; das sind bei Torsionsbeanspruchung alle Randelemente, und bei Biegung die Randelemente an der Stelle der größten Krümmung, also des maximalen Biegemoments. Für die Elementdämpfung, die sich ja nach (4a) mit der Beanspruchung ändert, empfiehlt sich ein entsprechendes Vorgehen. Auch sie hat ja ihr Maximum in denselben Randelementen wie die Beanspruchung, und man kennt daher als Sonderfall der Elementdämpfung die Randdämpfung[1]:

$$\psi_R = \alpha\, \varepsilon_R^{\beta} \quad \text{bzw.} \quad \psi_R = \alpha^*\, \gamma_R^{\beta^*}. \tag{4b}$$

4. Werkstückdaten und Werkstoffdaten. Die eingangs skizzierte Aufgabe, den Resonanzausschlag unter Berücksichtigung der Werkstoffdämpfung zu ermitteln, ließe sich nunmehr mit einem Mindestaufwand von Versuchen in folgender Weise lösen: Man ermittelt zunächst experimentell die Kurve $\psi_{n1} = \psi_n(\varepsilon_R)$ für einen (z. B. zylindrischen) Probestab und rechnet diese Werkstückkurve in eine Kurve $\psi = \psi_R(\varepsilon_R) = \alpha\, \varepsilon_R^{\beta}$ um, die nur vom Werkstoff abhängt.

Es müßte nun möglich sein, aus dieser Werkstoffkurve für jeden Schwinger von beliebig gegebener Form und Größe wieder die entsprechende Kurve $\psi_{n2} = \psi_n(\varepsilon_R)$ zu errechnen und damit zahlenmäßig die Dämpfung anzugeben, die zur Beanspruchung des Bauteils gehört.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, Formeln aufzustellen, die es gestatten, Nenndämpfungskurven in Elementdämpfungskurven umzurechnen und umgekehrt. Diese Formeln werden letzten Endes bestimmt durch die Art der Verteilung der Spannung und damit auch der Dämpfung auf die einzelnen Elemente des Schwingers (Abb. 2).

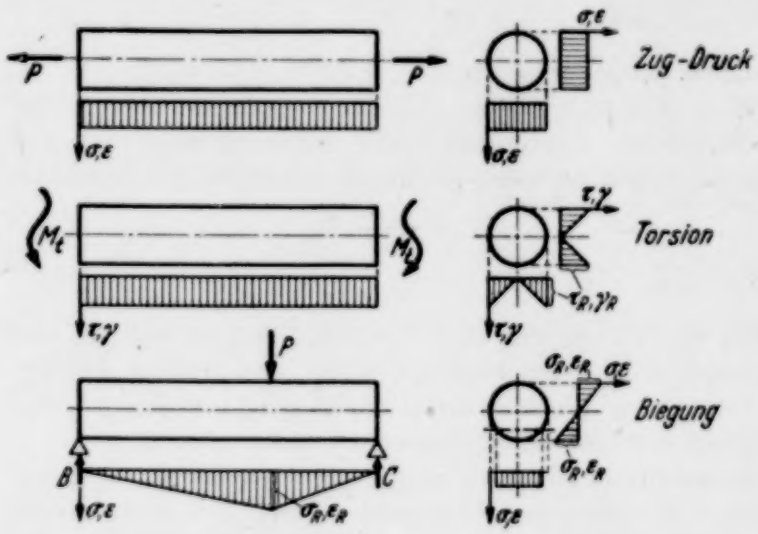


Abb. 2. Spannungsverteilung bei verschiedenen Beanspruchungsarten.

Bei Zug-Druck-Schwingern ist die Beanspruchung und damit auch die Elementdämpfung gleichmäßig verteilt, und somit gilt hier:

$$\psi_n = \frac{S}{A} \equiv \frac{dS}{dA} = \psi. \tag{5}$$

Bei Torsions-Schwingern ist die Beanspruchung zwar über die Länge hin gleichmäßig, über den Querschnitt aber linear-polarsymmetrisch verteilt. Somit verteilt sich auch die Elementdämpfung polarsymmetrisch, allerdings nicht linear, sondern wegen (4a) mit der Potenz β. Elementdämpfung und Nenndämpfung werden hier also nicht übereinstimmen.

Die Ableitungen der Umrechnungsformeln für Torsions-Schwinger findet man im Zusammenhang bei *K. Klotter*[2]. Danach gilt für Bauteile mit Kreisringquerschnitt

$$\psi_n = \psi_R \frac{4}{4+\beta} \frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4} \quad \text{mit} \quad \psi_R = \alpha^*\, \gamma_R^{\beta^*}. \tag{6}$$

Der Ausdruck $\varrho = r_1/r_2$ ist das Verhältnis von Innenhalbmesser r_1 zu Außenhalbmesser r_2 des Ringes. Man sieht übrigens, daß nicht die absoluten Abmessungen in die Formeln eingehen, sondern lediglich der Verhältniswert ϱ.

Aus der angegebenen Formel ergibt sich als Sonderfall für den Vollkreisquerschnitt mit $\varrho = 0$

$$\psi_n = \psi_R \frac{4}{4+\beta}. \tag{7}$$

Für den Vollkreisquerschnitt entfällt also jeglicher Einfluß der Abmessungen, und auch die Nenndämpfung wird zu einer reinen Werkstoffgröße, bleibt allerdings verschieden von der Elementdämpfung.

[1] *O. Föppl, E. Becker* u. *G. v. Heydekampf*, Die Dauerprüfung der Werkstoffe. Berlin 1929.

[2] *K. Klotter*, Einführung in die technische Schwingungslehre, Bd. 1, S. 184–186. Berlin 1938.

5. Umrechnungsformeln bei Biegeschwingern. Umrechnungsformeln in der eben besprochenen Art waren für Biegeschwinger bisher noch nicht bekannt. Bei Biegebeanspruchung ändert sich die Spannung und damit auch die Elementdämpfung ja nicht nur über den Querschnitt, sondern auch über die Länge hin, und außerdem ist die Änderung über die Länge noch vom Belastungsfall, d. h. der Art der Auflagerung, Einspannung und Belastung, abhängig.

Unter Beachtung der soeben erläuterten Einflüsse können nun folgende Überlegungen zur Ableitung der gesuchten Umrechnungsformeln führen: Definitionsgemäß gilt nach (2) für die Nenndämpfung der Quotient

$$\psi_n = \frac{S}{A}.$$

Der Zähler, die Dämpfungsarbeit S des Schwingers, ergibt sich als Summe der Dämpfungsarbeiten dS aller Elemente. Aus der Definition der Elementdämpfung in (1) folgt

$$dS = \psi\, dA = \psi\, a\, dV$$

und damit für den ganzen Schwinger unter Beachtung von $\psi = \alpha\, \varepsilon^\beta$ und $a = \frac{1}{2} E\, \varepsilon^2$

$$S = \int_{(V)} \psi\, a\, dV = \alpha \frac{E}{2} \int_{(V)} \varepsilon^{2+\beta}\, dV.$$

Mit $dV = dF\, dx$ und $\varepsilon = \frac{M(x)}{EJ} y$ wird daraus

$$S = \alpha \frac{E}{2} \left(\frac{1}{EJ}\right)^{2+\beta} \int_0^l M^{2+\beta}(x)\, dx \int_{(F)} y^{2+\beta}\, dF. \tag{8}$$

Der Nenner, die Formänderungsenergie A, ermittelt sich nach der Lehre von der Balkenbiegung zu

$$A = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2(x)\, dx. \tag{9}$$

Damit erhält man für den ganzen Quotienten den Ausdruck:

$$\psi_n = \alpha \left(\frac{1}{EJ}\right)^\beta \frac{1}{J} \int_{(F)} y^{2+\beta}\, dF \frac{\int_0^l M^{2+\beta}(x)\, dx}{\int_0^l M^2(x)\, dx}. \tag{10}$$

Der Einfluß des Bauteils und des Belastungsfalls steckt nun noch in den Integralen über $M(x)$. Man kann ihn eliminieren, indem man die Integrale durch eine Verformungsgröße, zweckmäßig die größte im Schwinger auftretende Dehnung ε_R, ausdrückt. Sie tritt bekanntlich am Rande an der Stelle der größten Krümmung auf.

In der bisherigen, allgemein für Biegung geltenden Form läßt sich diese Operation aber nicht einfach durchführen. Es empfiehlt sich daher, nunmehr die Belastungsfälle einzeln zu behandeln.

6. Der beiderseits frei aufliegende Biegeschwinger. Als Musterbeispiel sei die Ableitung an dem frei aufliegenden Schwinger (Abb. 3) durchgeführt.

Man braucht zunächst die Funktion $M = M(x)$, die Momentlinie. Dabei ist der Ursprung der Koordinate x zweckmäßig so zu wählen, daß $M(x)$ auch in der Potenz $(2+\beta)$, wo β eine gebrochene Zahl sein kann, noch einfach integrierbar ist. In dem vorliegenden Beispiel kommt noch hinzu, daß die Momentenlinie infolge der Einzellast als Unstetigkeitsstelle der Belastung durch verschiedene Ausdrücke wiedergegeben wird und daher in zwei Intervallen integriert werden muß.

Wegen $M(x_1) = \frac{Pc}{l} x_1$ für $0 \leqq x_1 \leqq b$ und $M(x_2) = \frac{Pb}{l} x_2$ für $0 \leqq x_2 \leqq c$ wird das Integral $\int_0^l M^2(x)\, dx$ zu

$$\int_0^b M^2(x_1)\, dx_1 + \int_0^c M^2(x_2)\, dx_2 = \left(\frac{Pbc}{l}\right)^2 \frac{b+c}{3}.$$

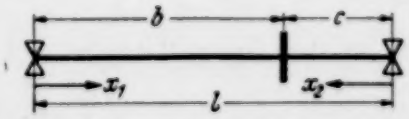


Abb. 3. Beiderseits frei aufliegender Biegeschwinger mit Einzelmasse.

und entsprechend gilt für das Integral in der Potenz $(2+\beta)$

$$\int_0^b M^{2+\beta}(x_1)\,dx_1 + \int_0^c M^{2+\beta}(x_2)\,dx_2 = \left(\frac{Pbc}{l}\right)^{2+\beta} \frac{b+c}{3+\beta}\,.$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung (10) für das vorliegende Beispiel

$$\psi_n = \alpha \left(\frac{1}{EJ}\right)^{\beta} \left(\frac{Pbc}{l}\right)^{\beta} \frac{3}{3+\beta} \frac{1}{J} \int_{(F)} y^{2+\beta}\,dF\,. \tag{11}$$

Ziel der Ableitung ist es nun, einen Zusammenhang zwischen dieser Nenndämpfung ψ_n und der Elementdämpfung ψ zu finden. Da sich ψ von Element zu Element ändert, empfiehlt es sich, mit einer ausgezeichneten Elementdämpfung, nämlich der Randdämpfung $\psi_R = \alpha\,\varepsilon_R^{\beta}$ zu arbeiten.

Für den vorliegenden Belastungsfall ermittelt sich bekanntlich die größte Dehnung zu

$$\varepsilon_R = \frac{M_{max}}{EJ}\,y_r = \frac{Pbc}{EJl}\,y_r\,. \tag{12}$$

Hierbei ist M_{max} das größte Biegemoment und y_r der Abstand der äußersten Randfaser des Querschnitts von der neutralen Faser. Setzt man den Wert Pbc/l aus (12) in (11) ein, so erhält man

$$\psi_n = \alpha\,\varepsilon_R^{\beta}\,\frac{3}{3+\beta}\,\frac{1}{y_r^{\beta} J} \int_{(F)} y^{2+\beta}\,dF\,.$$

Mit $\alpha\,\varepsilon_R^{\beta} = \psi_R$ ist die Randdämpfung in dieser Formel enthalten. Der Einfluß von Form und Größe des Balkenquerschnitts steckt nun nur noch in dem Ausdruck

$$\frac{1}{y_r^{\beta} J} \int_{(F)} y^{2+\beta}\,dF = \eta\,. \tag{13}$$

Dieser Wert ist eine (wegen β) werkstoffbedingte Querschnittsgröße.

Die Umrechnungsformel zwischen Element- und Nenndämpfung lautet also für den beiderseits frei aufliegenden Biegeschwinger

$$\psi_n = \psi_R\,\frac{3}{3+\beta}\,\eta\,. \tag{14}$$

In ähnlicher Weise sind die Formeln für die wichtigsten Belastungsfälle abgeleitet und in Tafel 1 zusammengestellt.

7. Querschnittseinfluß. Die Querschnittskenngröße η kann nach (13) für jeden beliebigen Querschnitt ermittelt werden. Für die beiden wichtigsten Fälle, den Rechteck- und den Kreisringquerschnitt sei die Ableitung kurz skizziert.

Für den Rechteckquerschnitt (Abb. 4a) ist der Randfaserabstand $y_r = h/2$ und das axiale Flächenträgheitsmoment $J = d\,h^3/12$. Für das Integral gilt

$$\int_{(F)} y^{2+\beta}\,dF = 2\,\frac{d\,h^{3+\beta}}{2^{3+\beta}(3+\beta)}\,.$$

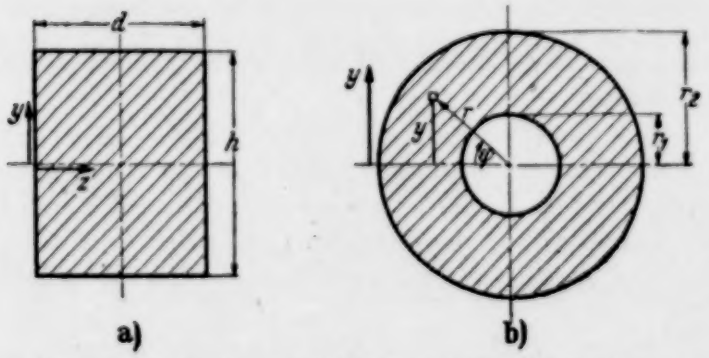


Abb. 4. a) Rechteckquerschnitt mit kartesischen Koordinaten y, z.
b) Kreisringquerschnitt mit Polarkoordinaten r, φ.

Damit erhält man durch Einsetzen in (13) den Wert

$$\eta = \frac{3}{3+\beta}\,. \tag{15}$$

Beim Kreisringquerschnitt (Abb. 4b) empfiehlt es sich, von den kartesischen Koordinaten y, z auf Polarkoordinaten r, φ überzugehen. Der Randfaserabstand ist $y_r = r_2$, das axiale Flächenträgheitsmoment ist

$$J = \frac{\pi r_2^4}{4}\,(1-\varrho^4) \quad \text{mit} \quad \varrho = r_1/r_2\,,$$

und für das Integral ergibt sich damit

$$\int_{(F)} y^{2+\beta}\,dF = 2\,\frac{r_2^{4+\beta}(1-\varrho^{4+\beta})}{4+\beta} \int_0^{\pi} (\sin\varphi)^{2+\beta}\,d\varphi\,.$$

Der Ausdruck $2\int_0^{\pi}(\sin\varphi)^{2+\beta}\,d\varphi = K$ ist ein Zahlenwert, der nur von β abhängt und dessen Ermittlung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitet. Die endgültige Formel für den Kreisringquerschnitt lautet dann

$$\eta = \frac{4K}{\pi(4+\beta)}\,\frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4}\,. \tag{16}$$

Die Formel für den Vollkreisquerschnitt erhält man als Sonderfall für $\varrho=0$.

Siehe Tafel 1.

8. Anwendung der Tafel. In der Tafel 1 sind die Umrechnungsformeln zwischen Nenndämpfung und Elementdämpfung für die wichtigsten Belastungsfälle und Querschnittsformen zusammengestellt. Man sieht, daß bei Rechteck- und Vollkreisquerschnitt die Abmessungen keine Rolle spielen und daß beim Kreisringquerschnitt nur das Halbmesserverhältnis ϱ in die Formel eingeht. Ein Einfluß der Balkenlänge l ist nicht vorhanden.

Nichtsdestoweniger schlägt sich der Einfluß von Querschnittsform und Belastungsfall in den Umrechnungsformeln nieder.

An einem Beispiel möge nun gezeigt werden, was die Tafel leistet und in welcher Weise sie angewendet werden kann.

Es ist zunächst notwendig, für einen gegebenen Werkstoff die Dämpfungskurve $\psi=\alpha\,\varepsilon^{\beta}$ aufzunehmen. Dies möge z. B. durch Dauerversuche mit zylindrischen Probestäben an einer Prüfmaschine, bei der das Biegemoment über die Meßlänge konstant bleibt, geschehen. Man nimmt so experimentell eine Kurve $\psi_{\text{Vollkreis}}=\psi_n(\varepsilon_R)$ auf. Durch Umkehrung der entsprechenden Formel in Tafel 1 kann man daraus die Elementdämpfung des Werkstoffs errechnen:

$$\psi_R = \psi(\varepsilon_R) = \frac{\pi(4+\beta)}{4K}\,\psi_{\text{Vollkreis}}\,.$$

Es möge nun ein beiderseits eingespannter Schwinger mit Einzelmasse in der Mitte gegeben sein; der Balken habe Rechteckquerschnitt und bestehe aus dem eben besprochenen Werkstoff.

Dann läßt sich in einfacher Weise aus der Tafel die Formel ablesen, mit deren Hilfe man die Nenndämpfung dieses gegebenen Bauteils aus der Elementdämpfung $\psi=\alpha\,\varepsilon_R^{\beta}$ errechnen kann:

$$\psi_{\text{Rechteck}} = \psi_R\,\frac{9}{(3+\beta)^2} = \alpha\,\varepsilon_R^{\beta}\,\frac{9}{(3+\beta)^2}\,.$$

Will man nun den Resonanzausschlag des Schwingers ermitteln, so überführt man die Werkstoffdämpfung, die ja einer Potenz des Ausschlags proportional ist, in eine fiktive geschwindigkeitsproportionale Dämpfung. Bei dieser Reduktion muß die Dämpfungsarbeit je Schwingungsperiode erhalten bleiben.

Für die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung ergibt sich nach bekannten Formeln diese Dämpfungsarbeit zu

$$S_1 = b_1\,\Omega\,\pi\,f^2. \tag{17}$$

Hierin ist b_1 der Dämpfungsfaktor, Ω die Erregerfrequenz und f die Schwingungsamplitude (Biegepfeil), gemessen an der Stelle der schwingenden Masse.

Für die Werkstoffdämpfung ergibt sich nach (2) die Dämpfungsarbeit zu

$$S = \psi_n\,A\,. \tag{18}$$

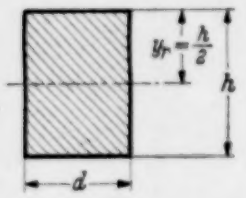
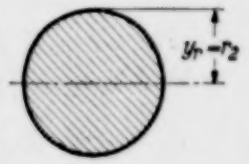
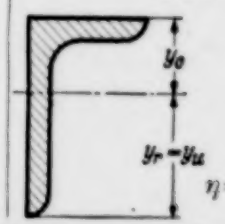
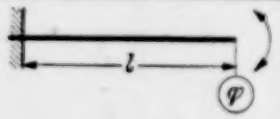
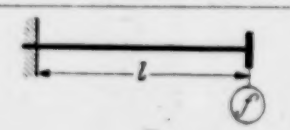
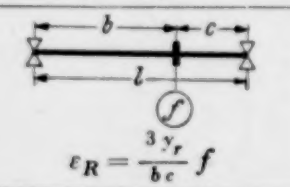
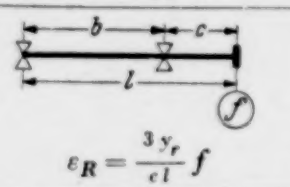
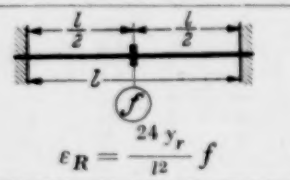
Die Formänderungsenergie A, die in der Schwingungsumkehrlage im Schwinger aufgespeichert ist, ermittelt sich nach (9) und ergibt auch je nach Belastungsfall verschiedene Ausdrücke. Auch diese Formeln sind in Tafel 1 zusammengestellt.

Sowohl ψ_n als auch A sind dort in Abhängigkeit von der Größtdehnung ε_R angegeben. Der Zusammenhang zwischen Größtdehnung ε_R und Schwingungsamplitude f hängt ebenfalls vom Belastungsfall ab und ist ebenfalls in Tafel 1 zu finden. Es ist nun also möglich, die Dämpfungsarbeit S als Funktion der Amplitude f auszudrücken, und zwar gilt für das vorliegende Beispiel aus der Tafel

$$A = \frac{E}{2}\,\varepsilon_R^2\,\frac{dhl}{9}\,,$$

$$\varepsilon_R = \frac{24\,y_r}{l^2}\,f = \frac{12\,h}{l^2}\,f$$

Tafel 1. *Werkstoffdämpfung bei einfachen Biegeschwingern.*

Querschnittsform / Belastungsfall	Rechteck	Kreisring	Vollkreis	beliebig
	 $\eta = \frac{3}{3+\beta}$	$\varrho = \frac{r_1}{r_2}$ $\eta = \frac{4K}{\pi(4+\beta)} \frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4}$	 $\eta = \frac{4K}{\pi(4+\beta)}$	 $\eta = \frac{1}{J_{y_r}^{\beta}} \int_{(F)} y^{2+\beta}\, dF$
Einseitig eingespannt mit Moment  $\varepsilon_R = \frac{y_r}{l}\varphi$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{3}{3+\beta}$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{dhl}{3}$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{4K}{\pi(4+\beta)} \frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4}$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{\pi l r_2^2}{4}(1-\varrho^4)$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{4K}{\pi(4+\beta)}$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{\pi l r_2^2}{4}$	$\Psi_n = \Psi_R\, \eta$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{Jl}{y_r^2}$
Einseitig eingespannt mit Einzellast  $\varepsilon_R = \frac{3\,y_r}{l^2} f$		$K = K(\beta) = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (\sin\varphi)^{2+\beta}\, d\varphi$		
Beidseitig freiaufliegend mit Einzellast  $\varepsilon_R = \frac{3\,y_r}{bc} f$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{9}{(3+\beta)^2}$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{12K}{\pi(4+\beta)(3+\beta)} \frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4}$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{12K}{\pi(4+\beta)(3+\beta)}$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{3}{3+\beta}\eta$
Zweimal freiaufliegend mit Einzellast überhang  $\varepsilon_R = \frac{3\,y_r}{cl} f$	$A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{dhl}{9}$	$A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{\pi l r_2^2(1-\varrho^4)}{12}$	$A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{\pi l r_2^2}{12}$	$A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{Jl}{3\,y_r^2}$
Beidseitig eingespannt mit Einzellast i. d. Mitte  $\varepsilon_R = \frac{24\,y_r}{l^2} f$				
Beidseitig eingespannt mit Einzellast in der Mitte $\varepsilon_R = \frac{144\,y_r}{7\,l^2} f$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{3}{(3+\beta)^2} \times \left[\frac{81}{77} + \frac{216}{77}\left(\frac{5}{6}\right)^{2+\beta}\right]$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{7}{81} dhl$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{4K}{\pi(4+\beta)(3+\beta)} \times \left[\frac{81}{77} + \frac{216}{77}\left(\frac{5}{6}\right)^{2+\beta}\right] \frac{1-\varrho^{4+\beta}}{1-\varrho^4}$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{7}{108}\pi l r_2^2(1-\varrho^4)$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{4K}{\pi(4+\beta)(3+\beta)} \times \left[\frac{81}{77} + \frac{216}{77}\left(\frac{5}{6}\right)^{2+\beta}\right]$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{7}{108}\pi l r_2^2$	$\Psi_n = \Psi_R \frac{1}{3+\beta} \times \left[\frac{81}{77} + \frac{216}{77}\left(\frac{5}{6}\right)^{2+\beta}\right] \eta$ $A = \frac{E}{2}\varepsilon_R^2 \frac{7\,Jl}{27\,y_r^2}$

und damit nach (18):

$$S = \alpha \frac{E}{2} \frac{dhl}{(3+\beta)^2} \varepsilon_R^{2+\beta} = \alpha \frac{E}{2} \frac{dhl}{(3+\beta)^2} \left(\frac{12h}{l^2}\right)^{2+\beta} f^{2+\beta}. \tag{19}$$

Aus der Gleichsetzung der Formeln (17) und (19) ergibt sich dann für den Dämpfungsfaktor der Wert

$$b_1 = \frac{\alpha E}{2\pi\Omega} \frac{dhl}{(3+\beta)^2} \left(\frac{12h}{l^2}\right)^{2+\beta} f^{\beta}. \tag{20}$$

Hiermit kann man nun in die bekannten Differentialgleichungen für geschwindigkeitsproportional gedämpfte Schwingung eingehen und den Resonanzausschlag errechnen.

9. Kritik. Die abgeleiteten Beziehungen gelten unter folgenden Voraussetzungen:

1. Es gilt die Annahme von *Navier* und *Bernoulli*, daß die Querschnitte der Bauteile vor und nach der Beanspruchung eben bleiben. Diese Annahme trifft bekanntlich bei Torsion von Stäben mit nicht kreisförmigem Querschnitt nicht mehr zu, weshalb hierfür auch keine Formeln abgeleitet wurden.

2. Nicht berücksichtigt wurde eine zusätzliche Dämpfung, die durch gegenseitige thermisch-elastische Beeinflussung der Elemente bei inhomogener Spannungsverteilung (Wärmefluktuationsdämpfung) auftritt. Diese Dämpfung ist bei normalen Frequenzen vernachlässigbar und erhält eine gewisse Bedeutung erst bei Frequenzen in der Größenordnung von 1000 Hz. Es sei hier auf die einschlägigen Arbeiten von *K. Bennewitz* und *H. Rötger*[1] sowie von *C. Zener*[2] verwiesen.

3. Hinsichtlich der Formeln für Biegeschwingungen wurde die Dämpfungsarbeit, die von den wechselnden Querkräften hervorgerufen wird, vernachlässigt. Sie ist sehr gering.

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob nicht eine Umrechnung der Dämpfungskurve $\psi = \alpha^* \gamma^{\beta^*}$ für Schubspannungen in die Kurve $\psi = \alpha \varepsilon^{\beta}$ für Normalspannungen eines Werkstoffs möglich ist. In dieser Richtung hat *J. Schmidt*[3] Versuche durchgeführt und für verschiedene Werkstoffe einen Umrechnungsfaktor ermittelt. Dieser Faktor ist jedoch für jeden Werkstoff ein anderer, und es fehlt eine Begründung dieses Faktors auf allgemeinen Werkstoffkonstanten. Man müßte also bei einem neuen Werkstoff doch einmal sowohl Schub- als auch Normalspannungsversuche durchführen, um den Faktor zu finden; und da kommt es auf das gleiche hinaus, wenn man auf die beiden Dämpfungskurven direkt zurückgreift.

10. Zusammenfassung. Es wurde hervorgehoben, daß man zwei Kennwerte zur Darstellung der Werkstoffdämpfung unterscheiden muß. Der eine, die Nenndämpfung, ist eine Funktion von Werkstoff und Bauteil; der andere, die Elementdämpfung, ist eine reine Werkstoffgröße. Allerdings hängen beide von der Beanspruchung ab. Man kann diese Abhängigkeit für einen gegebenen Werkstoff im allgemeinen durch eine Potenzfunktion darstellen.

Während bei Zug-Druck Nenndämpfung und Elementdämpfung übereinstimmen, findet man bei Torsion, daß die Nenndämpfung im allgemeinen von Querschnittsform und -größe abhängt. Bei Biegung ist die Nenndämpfung außer vom Querschnitt auch noch vom Belastungsfall (Auflagerung, Einspannung, Belastung) abhängig.

Es wurden Umrechnungsformeln abgeleitet, die es gestatten, aus der Elementdämpfung des Werkstoffs für die einfachen Biegeschwinger die Nenndämpfung des Bauteils zu ermitteln. Schließlich wurde gezeigt, wie man daraus die Dämpfungsarbeit errechnen und nach Reduktion auf eine fiktive geschwindigkeitsproportionale Dämpfung den Resonanzausschlag unter Berücksichtigung der Werkstoffdämpfung ermitteln kann.

[1] *K. Bennewitz* u. *H. Rötger*, Phys. Z. 37 (1936) S. 578; 39 (1938) S. 835; Z. techn. Phys. 19 (1938) S. 521.
[2] *C. Zener*, Phys. Rev. 52 (1937) S. 230; 53 (1938) S. 90; Proc. Phys. Soc. London 52 (1940) S. 152.
[3] *J. Schmidt*, Die Dämpfungsfähigkeit von Eisen- und Nichteisenmetallen. Mitt. Wöhler Inst. 9 (1931).

(Eingegangen am 19. August 1948.)
Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Günter Denkhaus*, (17a) Karlsruhe, Kanonierstraße 1.

Die Bahn des Momentanpols und die Kardanlage.

Von **W. Meyer zur Capellen.**

1. Vorbemerkung. Der Begriff der Kardanlage dürfte zuerst von *Rauh*[1] benutzt worden sein und wurde von *Alt*[2] näher untersucht. Da hierbei verschiedene, in früheren Darstellungen[3], [4] gebrachte Gesichtspunkte übersehen wurden und einige wesentliche Ergänzungen zweckmäßig sind, sei das Problem nochmals beleuchtet.

2. Die der Kardanbewegung momentan ähnliche Bewegung. Bei der Kardanbewegung rollt bekanntlich ein Kreis (Gangpolbahn p) im Inneren eines doppelt so großen festen Kreises (Rastpolbahn π) ab, wobei getrieblich auch zur Erzeugung der gleichschenklige Schubkurbeltrieb oder die Verschiebung einer Strecke mit ihren Endpunkten auf je einer Geraden gewählt werden kann. Hierbei ist p identisch mit dem Wendekreis, dessen augenblicklich mit dem bewegten System verbundene Punkte Wendepunkte ihrer Bahn, hier aber doppelt zählende Strecken, und zwar Durchmesser von π beschreiben.

Hier beschreibt also auch der Momentanpol P, d. h. der Berührungspunkt der Polkurven, als Systempunkt eine Bahnstelle mit unendlich großem Krümmungskreis, während im allgemeinen der Momentanpol eine Bahnstelle mit dem Krümmungshalbmesser Null, eine gewöhnliche Spitze, beschreibt. Von einer momentan ähnlich gearteten Bewegung wird man verlangen müssen, daß der Momentanpol nicht gerade eine Bahnstelle mit unendlich großem, immerhin mit endlichem Krümmungshalbmesser beschreibt, d. h., daß die von P beschriebene Bahnkurve eine Schnabelspitze besitzt.

Wie *R. Müller* gezeigt hat, ergibt sich für den Krümmungshalbmesser der bei beliebiger ebener Bewegung vom Momentanpol beschriebenen Bahnstelle der Wert

$$R = ds\,\frac{d\vartheta+2\,d\tau+d^2\vartheta+2\,d^2\tau}{ds-d\tau+2\,d^2\vartheta-d^2\tau}\,, \tag{1}$$

worin ds das Bogenelement der festen Polbahn π, $d\vartheta$, $d\vartheta+d^2\vartheta$, ... die unendlich kleinen Drehungen um die Momentanpole $P, Q, \ldots$ und $d\tau$ der Kontingenzwinkel der Polbahn π bedeuten. Im allgemeinen wird hiernach $R=0$; wenn jedoch $d\tau=d\vartheta$ oder

$$\tau'=\vartheta' \tag{2a}$$

wird (Striche bedeuten Ableitungen nach der Bogenlänge s), so wird R nicht gleich Null, sondern hat den im allgemeinen endlichen Wert

$$R=\frac{3\,\vartheta'}{2\,\vartheta''-\tau''}\,. \tag{2b}$$

Wie *R. Müller*[3a,c] bereits gezeigt hat, berührt der Krümmungskreis hierbei fünfpunktig, d. h., P ist ein *Burmester*scher Punkt[4]. Der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Polbahntangente, und eine solche Getriebestellung liegt beim Gelenkviereck, wie ohne die vorstehenden Formeln leicht zu erkennen ist, in den Umkehrlagen, Abb. 1 a, b, vor, da dann der Punkt $B\equiv P$ den äußersten Punkt seiner Kreisbahn erreicht hat. Außerdem ist eine solche Getriebestellung dann vorhanden, wie bereits *R. Müller* gezeigt hat und wie unten elementargeometrisch nachgewiesen wird, wenn der Fußpunkt des von P auf den Steg A_0B_0 gefällten Lotes mit dem Schnittpunkt H von Steg und Koppel zusammenfällt (vgl. Abb. 2). Der Krümmungshalbmesser hat dann den Wert

$$R=\frac{PH\cos\gamma}{\cos(\beta-\alpha)\cos\gamma-\sin(\alpha+\gamma)\sin\gamma}\,. \tag{3}$$

Nun sind zwei bemerkenswerte Sonderfälle zu nennen[5]:

---

[1] *K. Rauh, H. Marks, W. Bündgens, K. Otto*, Praktische Getriebetechnik Bd. 2, Kardanbewegung und Koppelbewegung. VDI-Verlag 1948.

[2] *H. Alt*, Ing.-Arch. 14 (1944) 319.

[3] a) *Reinhold Müller*, Einführung in die theoretische Kinematik. Berlin 1932. – b) Ders., Z. Math. Phys. 48 (1902) 224. – c) Ders., Z. Math. Phys. 42 (1897) 269.

[4] *W. Meyer zur Capellen*, Mtsh. Math. Phys. 41 (1934) 285.

[5] Von Durchschlags- und Verzweigungslagen, ebenso von Lagen mit unendlich fernem Pol soll abgesehen werden.

a) Der Krümmungshalbmesser wird unendlich groß; dann beschreibt P eine gewöhnliche Spitze, aber mit fünfpunktig berührender Tangente, was der oben skizzierten Kardanbewegung näher kommen dürfte. Nach (2) tritt dies ein, wenn neben $\tau' = \vartheta'$ noch $2\vartheta'' = \tau''$ ist (vgl. unten), und beim ebenen Gelenkviereck erfordert dies das Verschwinden des Nenners in (3) (vgl. unten).

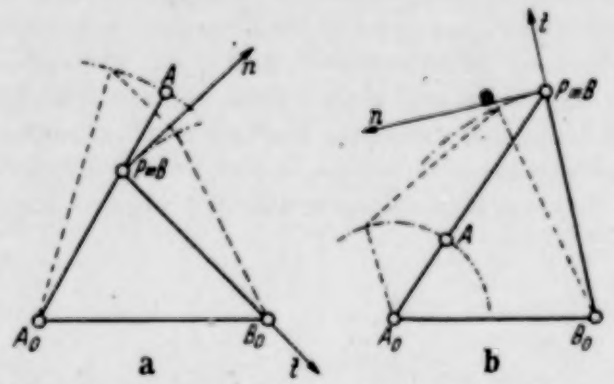


Abb. 1. Umkehrstellungen beim Gelenkviereck als Kardanlagen.

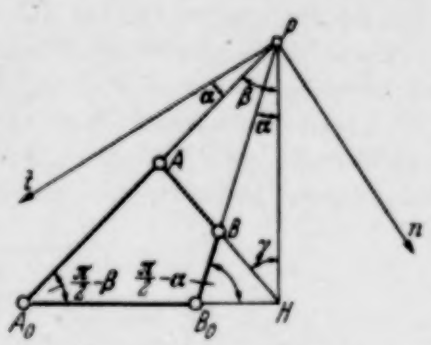


Abb. 2. Allgemeine Stellung des Gelenkvierecks in der Kardanlage.

b) Der Krümmungskreis hat nicht nur fünf, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte mit der Kurve gemeinsam (die Höchstzahl bei der Koppelkurve als trizirkularer Kurve sechster Ordnung). Dann muß R einen stationären Wert haben. Ein gewöhnlicher Krümmungskreis vom Krümmungshalbmesser r_0 berührt dreipunktig, eine vierpunktige Berührung erfordert $dr_0 = 0$, eine fünfpunktige $d^2 r_0 = 0$ und eine sechspunktige zudem $d^3 r_0 = 0$. Da hier in unserem Zusammenhang bereits eine fünfpunktige Berührung vorliegt, muß zudem $d^3 R = 0$ sein, und dies führt nach (1) mit $\tau' = \vartheta'$ auf die Bedingung

$$\tau'' = 0\,, \tag{4}$$

was

$$R = \frac{3\vartheta'}{2\vartheta''} \tag{5}$$

liefert[1] und nach (3) beim Gelenkviereck

$$\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -1 \tag{6}$$

fordert; der Krümmungshalbmesser R hat nach (3) den Wert

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{PH}{\cos\alpha\cos\beta}\,, \tag{7}$$

d. h., der Krümmungskreis ist identisch mit dem Umkreis des Dreiecks $A_0 B_0 P_0$, worauf unten noch näher eingegangen wird.

3. Die Polkurven in der Kardanlage. Bis jetzt haben wir von der „Ähnlichkeit" mit einer Kardanbewegung im betrachteten Augenblick, d. h. von einer „Kardanlage" nur gesagt, daß sie durch eine endliche Krümmung oder durch die Krümmung Null der vom Momentanpol beschriebenen Bahnstelle charakterisiert sei. Eine weitere Ähnlichkeit ergibt sich durch die Betrachtung der Polkurven und vor allem der Kreispunkt- und Mittelpunktkurven.

Die Krümmungshalbmesser $\varrho_\pi = PM_\pi$ der festen Polbahn π und $r_p = PM_p$ der beweglichen Polkurve p sind bekanntlich[2] durch

$$\varrho_\pi = \frac{1}{\tau'}\,, \qquad r_p = \frac{1}{\vartheta'+\tau'} \tag{8}$$

gegeben und durch die *Euler-Savary*sche Gleichung

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{\varrho_\pi} = \frac{1}{d_w}$$

verknüpft, wobei $d_w = 1/\vartheta'$ gleich dem Durchmesser des Wendekreises ist. Die Punkte M_π, M_p liegen mit W auf der gleichen Seite der Polbahntangente, wenn τ' positiv ist (vgl. Abb. 3a für die allgemeine Lage).

[1] Glchg. (4) ist in der Glchg. (16a) der in Fußnote 4 von S. 308 zitierten Arbeit falsch angegeben, ohne daß die weiteren Ergebnisse dort davon berührt werden.

[2] Vgl. Fußnote 3 von S. 1 Arbeit a).

Die *Euler-Savary*sche Gleichung $\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{d_w}$ vermittelt die Beziehung zwischen den Abständen $PA = r$ und $PA_0 = \varrho$ des Bahnpunktes A und seines Krümmungsmittelpunktes A_0 vom Momentanpol P; sie bildet die A-Ebene auf die A_0-Ebene ab, und wenn die den Wendepol W, d. h. die positive Polbahnnormale enthaltende Halbebene, als obere Halbebene bezeichnet wird, so gilt, wenn die in die untere Halbebene weisenden Radienvektoren r, ϱ das negative Vorzeichen erhalten, die folgende Zuordnung, die zwar bekannt[1] ist, aber in Hinblick auf das folgende nochmals hervorgehoben werden muß: Der Halbwendekreis bildet sich in den Wendekreis, das zwischen Halbwendekreis und Wendekreis gelegene Gebiet in die obere Halbebene, die obere Halbebene außerhalb des Wendekreises in die untere Halbebene ohne das Gebiet des Rückkehrkreises und die untere Halbebene in das vom Rückkehrkreis umschlossene Gebiet ab.

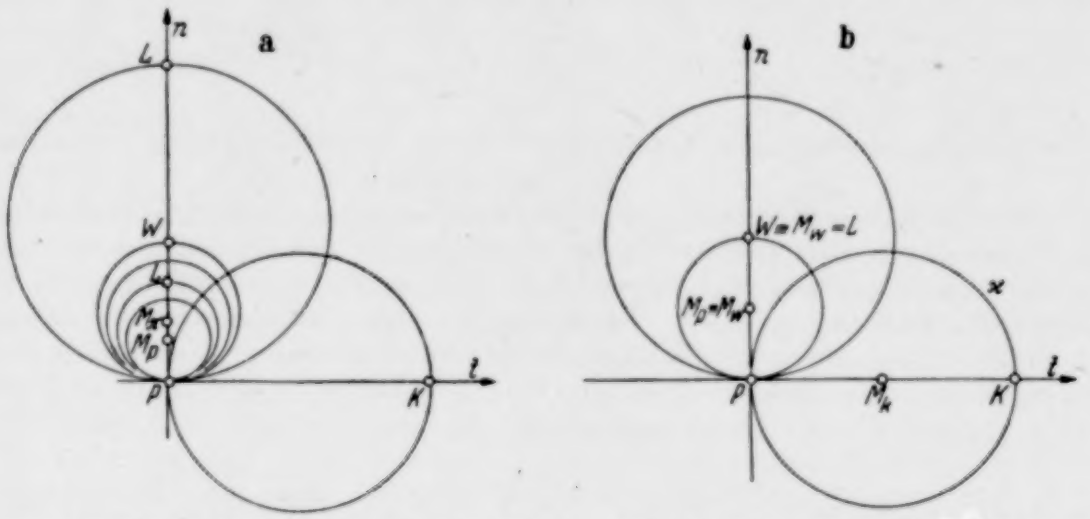


Abb. 3. Die Mittelpunkte der Polkurven und die Krümmungskreise der Kreispunkt- und Mittelpunktkurven a) in allgemeiner Getriebelage, b) in der Kardanlage.

Nehmen wir nun zu den Gleichungen (8) noch die Bedingung (2a) hinzu, so heißt dies aber, daß $\varrho_\Pi = d_w$ und $r_p = \frac{1}{2} d_w$ ist, d. h., daß der Krümmungskreis der beweglichen Polbahn halb so groß ist wie der der festen Polbahn, daß dieser jenen umschließt und daß ferner der Wendekreis Krümmungskreis der beweglichen Polkurve p ist, wie bereits bei *R. Müller* angegeben (vgl. Abb. 3b für diesen besonderen Fall). Die erste Tatsache wurde von *Rauh* als Definition der Kardanlage, die zweite zusätzlich von *Alt* gegeben.

4. Die Entartung der Kreispunktkurve und die Mittelpunktkurve. Der Ort derjenigen Systempunkte, die im Augenblick eine Bahnstelle mit vierpunktig berührendem Krümmungskreis beschreiben, ist die Kreispunktkurve k, und der Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte, d. h. Kreispunktkurve für die Umkehrung der Bewegung, ist die Mittelpunktkurve $\varkappa$, beides Fokalkurven dritter Ordnung mit je einem Doppelpunkt in P und der Polbahntangente und Polbahnnormalen als Tangenten in P. Seien $PL = l$, $PK = m$ die Halbmesser der Krümmungskreise von k in P (vgl. Abb. 3a) und $PL^* = l^*$, m^* die entsprechenden Halbmesser für $\varkappa$, so gilt bekanntlich

$$l = \frac{3}{2\vartheta' + \tau'}, \qquad m = m^* = \frac{3\vartheta'}{\vartheta''}, \qquad l^* = \frac{3}{\tau' + \vartheta'}, \tag{9}$$

wobei l und l^* wieder durch die *Euler-Savary*sche Gleichung verknüpft sind.

Für den besonderen hier betrachteten Fall $\tau' = \vartheta'$ wird aber $l = 1/\vartheta' = d_w$ und $l^* = \infty$, während m bleibt. Dies heißt zunächst, daß der Wendekreis auch zugleich noch Krümmungskreis der Kreispunktkurve in P ist. Wenn aber l^* nach ∞ strebt, so bedeutet dies, daß die Mittelpunktkurve in den Kreis $\varkappa$ und die Polbahntangente t zerfällt[2]. Von dieser kommt allerdings nur ein Punkt in Frage, nämlich der Krümmungsmittelpunkt P_0 der von P beschriebenen Bahnstelle, während bei der kinematischen Umkehrung alle Punkte der Polbahntangente Bahnstellen mit vierpunktig, der Punkt P_0 aber eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis beschreiben.

---

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) 288; Getriebtechn. 9 (1941) 489.

[2] P ist hiernach auch der *Ball*sche Punkt der Systemlage.

Diese Entartung der Mittelpunktkurve in den Kreis $\varkappa$ und die Polbahntangente ist gewissermaßen der Zentralpunkt des Problems, und von diesem aus können die Zusammenhänge einfach und übersichtlich dargestellt werden.

Geben wir uns (Abb. 4) zwei Punkte A_0, B_0 auf dem angenommenen Kreis $\varkappa$, so liegen die zugehörigen Bahnpunkte A, B auf den Strahlen PA_0, PB_0. Nun wird doch bei den üblichen Konstruktionen[1] der Kollineationspunkt H so bestimmt, daß der Strahl PB_0 um den gleichen Winkel gedreht wird, mit dem die Polbahntangente in die Richtung PA_0 gebracht wird; d. h., es ist Winkel $tPH = \alpha + \beta$. Andererseits bildet, da $M_k A_0$ und $M_k B_0$ mit t die Winkel 2α und 2β bilden, auch die Mittelsenkrechte von $A_0 B_0$ (Abb. 5) mit t den Winkel $\alpha + \beta$, d. h., PH steht auch senkrecht $A_0 B_0$. Alle möglichen Punkte A, B liegen somit auf den durch H gezogenen Geraden. Wählen wir einen Punkt A, so ist B damit bestimmt und damit auch der

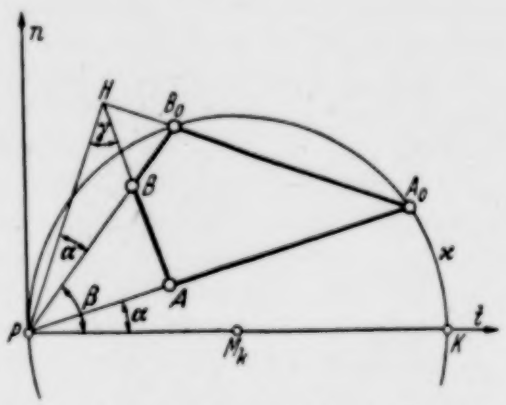


Abb. 4. Die entartete Mittelpunktkurve $\varkappa$ und zwei Paare zugeordneter Punkte A_0, A; B_0, B.

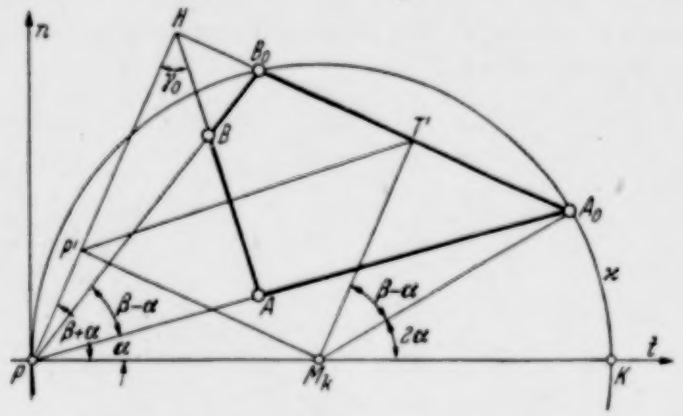


Abb. 5. Ermittlung des Gelenkvierecks, bei dem der Momentanpol P eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente beschreibt.

Wendekreisdurchmesser $d_w = 1/\vartheta'$; geben wir uns diesen, so sind damit A und B bestimmt, wobei AB durch H geht, da ja A, A_0 und B, B_0 durch die *Euler-Savary*sche Gleichung miteinander verknüpft sind.

Die Bedingung, daß PHA_0 ein rechter Winkel ist, ist für jedes Getriebe in der Kardanlage kennzeichnend und nur eine Folge der Entartung der Mittelpunktkurve (s. jedoch unten). Durch die Wahl des Wendekreises w, d. h. durch Wahl von ϑ', und durch Wahl von ϑ'', d. h., durch Wahl von m ist auch $\varkappa$ bestimmt; erst die Annahme von τ'', d. h. der Krümmungsänderung der festen Polkurve, bestimmt R bzw. P_0, oder die Annahme von P_0 bestimmt gemäß (2b) den Wert von τ''. So kann z. B. A gerade den Scheitel einer Ellipse oder eine zyklische Kurve beschreiben oder auch eine Koppelkurve irgendeines Gelenkviereckes; nur müßten A bzw. A_0 auf der zugehörigen Kreis- bzw. Mittelpunktkurve liegen. Ebenso können die Bahnen von A und B als feste Kurven ausgeführt sein (Nocken, Schlitz), aber in der betrachteten Systemlage müssen diese einen vierpunktig berührenden Krümmungskreis vom Mittelpunkt A_0 bzw. B_0 haben.

Sollen nun A_0, B_0 feste Punkte sein, so stellt $A_0 B_0 BA$ ein Gelenkviereck in der Kardanlage dar, und der dem Dreieck $A_0 B_0 P$ umbeschriebene Kreis ist neben der Polbahntangente t die Mittelpunktkurve. Da dann A, B Bahnstellen mit mehr als fünfpunktig berührendem Krümmungskreis beschreiben, läßt sich mit Hilfe der höheren Wendepole, wie *R. Müller* gezeigt hat, der Wert von τ'' angeben und damit die Formel (3) herleiten.

5. Sonderlagen. Bevor wir zu Sonderformen der Getriebe übergehen, wollen wir, ausgehend vom Kreis $\varkappa$, nochmals die obenerwähnten Sonderlagen betrachten.

a) Wir wählen A_0 auf $\varkappa$, aber B_0 auf t (Abb. 6). Damit geben wir uns aber (da t ja auch zur Mittelpunktkurve gehört) den Krümmungsmittelpunkt $P_0 \equiv B_0$

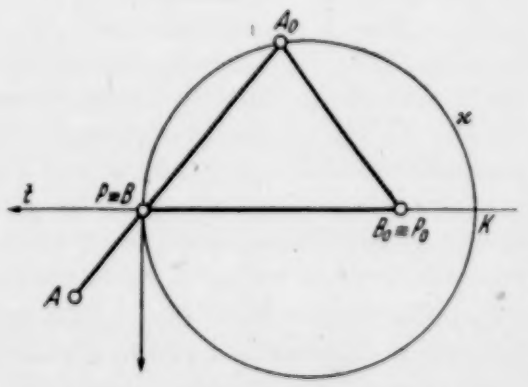


Abb. 6. Abb. 4, aber B_0 auf t.

[1] Vgl. Fußnote 3a von S. 308.

der von P beschriebenen Bahnstelle, d. h. den Wert nach (2b), und es gilt mit dem Wert m (9)

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{R}=\frac{d\tau''}{3},$$

d. h., wenn d noch gewählt wird oder durch A bestimmt ist, so kann τ'' angegeben werden. Sehen wir A_0, B_0 als feste Punkte an, so erhalten wir ein Gelenkviereck in der Umkehrlage gemäß Abb. 2. Da in Abb. 5 die Punkte A und A_0 auf verschiedenen Seiten der Polbahntangente liegen, muß n nach unten weisen, d. h., K liegt auf dem negativen Teil der Polbahntangente, m ist negativ, was auch, da $\vartheta'>0$, bedeutet, daß $\vartheta''<0$ ist. Da ϑ'' die Änderung des reziproken Wendekreisdurchmesser angibt, gilt: K liegt auf der positiven (negativen) t-Achse, je nachdem ob $\vartheta''>0$ ($\vartheta''<0$) oder ob der Wendekreisdurchmesser abnimmt (zunimmt).

b) Wir wählen A_0 auf dem Kreis $\varkappa$ und lassen B_0 mit K zusammenfallen. Dies bedeutet, daß $R=m$, also nach (2b) und (9), daß $\tau''=\vartheta''$ wird. Sind A_0, B_0 feste Punkte, so haben wir ein Gelenkviereck in der soeben betrachteten Umkehrlage, nur daß Steg und Koppel aufeinander senkrecht stehen.

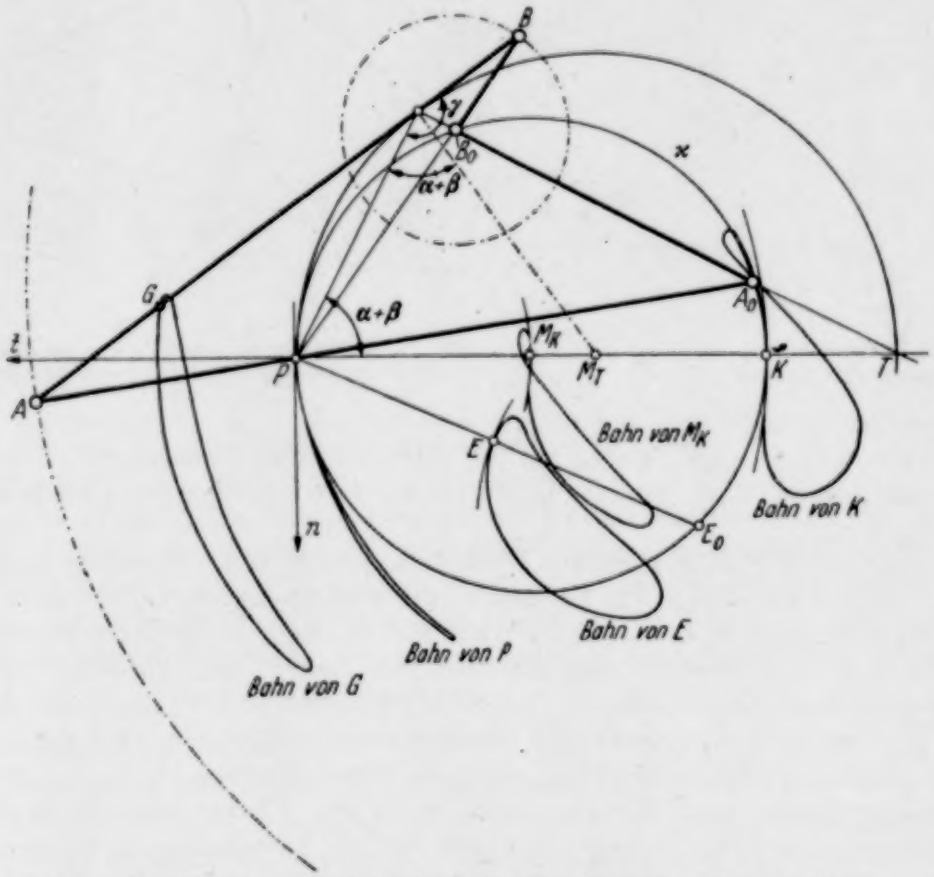


Abb. 7. Ermittlung eines Gelenkvierecks, bei dem der Momentanpol P eine Bahnstelle mit sechspunktig berührendem Krümmungskreis beschreibt.

c) Wir fragen nach dem Gelenkviereck, das bei gegebenem Kreis und gegebenem Steg A_0B_0 für R den Wert ∞ liefert, d. h. nach der geometrischen Bedingung für das Verschwinden des Nenners in (3). Hiernach muß mit $\gamma=\gamma_0$ als dem gesuchten Grenzwinkel $\cos(\beta-\alpha)\cos\gamma_0=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma_0$ sein: Man fällt (Abb. 5) von M_k, dem Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$, also des dem Dreieck A_0B_0P umbeschriebenen Kreises, vom Halbmesser $m/2$ die Lote M_kP auf HP und M_kT' auf HA_0. Das Lot von H auf $P'T'$ liefert die gewünschte Richtung. Es ist nämlich $M_kP'=HT'=\frac{1}{2}m\sin(\beta+\alpha)$ und $M_kT'=P'H=\frac{1}{2}m\cos(\beta-\alpha)$, also $HU=HP'\cos\gamma_0$, aber auch gleich $HT'\sin\gamma_0$, d. h., die vorstehende Bedingung ist erfüllt.

Bei anderer Lage des Strahles γ fallen die Projektionen P'' von P' und T'' von T' auf den Strahl γ_0 nicht zusammen, die Strecke $P''T''$ wäre ein Maß für den Nenner von R gemäß (3) und würde auch auf eine Konstruktion von R hinweisen, welche anzugeben zu weit führt.

d) Wir fragen schließlich nach den Deutungen der Gleichungen (5) und (6) für einen sechspunktig berührenden Krümmungskreis in der Kardanlage. Die erste läßt im Vergleich mit dem Wert m aus (9) erkennen, daß $R=\frac{1}{2}m$ wird, d. h., daß hier die Mittelpunktskurve $\varkappa$ oder der Kreis über A_0B_0P zugleich der Krümmungskreis ist. Sei nun T der Schnittpunkt des Steges

A_0B_0 mit t (Abb. 7), so muß der die Punkte A, B enthaltende Strahl Tangente in H an den Halbkreis über PT sein[1]. Denn man liest ab: $\gamma = 90° + (\alpha + \beta)$, d. h. $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ oder $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -1$, wie nach (6) verlangt wird.

6. Sonderformen des Gelenkvierecks. Wenn auch der Entwurf von Gelenkvierecken in der Kardanlage (ohne daß dies Wort allerdings benutzt wurde) und die Sonderfälle dieser Getriebe an anderer Stelle[2] verfolgt wurden, müssen wir auf diese nochmals eingehen:

a) Geben wir uns wie oben P, K, A_0, B_0, so gibt es einen Strahl durch H, der zu PA_0 parallel ist, der also A als unendlich fernen Punkt liefert. Dies heißt, daß A_0 auf dem Rückkehrkreis liegt. Sehen wir A_0 und B_0 als fest an, so entsteht eine exzentrische Schleifkurbel (der Sonderfall einer zentrischen ist möglich[2]; Abb. 8), bei der auch eine sechspunktige Berührung[2] (Abb. 7) möglich ist.

b) Bis jetzt haben wir den Schubkurbeltrieb noch nicht erhalten. Bei diesem beschreibt ein Punkt, z. B. B, auf w gelegen, eine Gerade durch den Wendepol W, da ihr Krümmungsmittelpunkt unendlich fern ist. Weil in der Kardanlage erstens die Mittelpunktkurve in t und den Kreis $\varkappa$ vom Halbmesser $m/2$ entartet, zweitens aber der auf $\varkappa$ gelegenen Punkt B_0 unendlich fern liegen soll, muß $\varkappa$ in eine Gerade, und zwar die Polbahnnormale entarten, d. h., die gesamte Mittelpunktkurve entartet in t, n und die unendlich ferne Gerade. Da aber der Kreis $\varkappa$ auch Krümmungskreis für die Kreispunktkurve war, entartet auch diese, und zwar in n und den Kreis vom Durchmesser l. Da hier in der Kardanlage ferner L mit dem Wendekreis zusammenfällt, ist dieser neben der Polbahnnormalen die Mittelpunktkurve; also müssen alle Punkte von w im Augenblick Bahnstellen mit vierpunktig berührender Tangente, d. h. Undulationspunkte beschreiben, sein. Rechnerisch fordert $m = 0$, daß $\vartheta'' = 0$ wird.

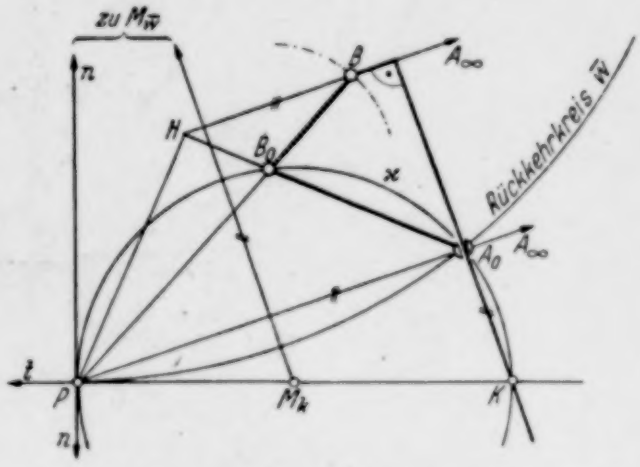


Abb. 8. Die exzentrische Schleifkurbel in der Kardanlage.

In Abb. 9 ist gegeben der Wendekreis w und ist ferner B auf ihm angenommen. Da auch hier immer noch PH senkrecht A_0B_0 sein muß, läuft PH parallel WB und HA_0 demzufolge parallel PB. Bei gewähltem A_0 ist damit H bestimmt, und A ergibt sich als Schnittpunkt von HB und n. Denn n gehört auch zur Kreispunktkurve.

Hätten wir dagegen A nicht auf n, sondern auch auf w angenommen, so hätten wir wieder, da A und B Geraden beschreiben, die Kardanbewegung erhalten. Wenn wir allerdings A_0 nicht als fest ansehen, ebensowenig die Bahn von B, so liegt eine Bewegung vor, bei der die Endpunkte der Strecke AB im Augenblick Flachpunkte beschreiben.

Wählen wir aber beim Schubkurbeltrieb A im Mittelpunkt des Wendekreises, so fällt A_0 mit W zusammen, und wir erhalten den zentrischen, aber gleichzeitig auch gleichschenkligen Schubkurbeltrieb, der wiederum mit der Kardanbewegung identisch ist.

Lassen wir beiläufig A_0 mit dem Rückkehrpol zusammenfallen, so erhalten wir den „Schleifschieber".

7. Anwendung des Satzes von Roberts. Liegt ein Getriebe, speziell ein Gelenkviereck, in der Kardanlage vor, so lassen sich gemäß dem *Robert*schen Satz über die dreifache Erzeugung der Koppelkurve, hier der von P beschriebenen Bahn, noch zwei weitere Gelenkvierecke angeben, die sich auch in der Kardanlage befinden. Diese drei Systeme haben den Momentanpol und die Mittelpunktkurve im Augenblick gemeinsam, d. h. die Polbahntangente und den Kreis $\varkappa$, der dem Dreieck $A\,B\,P$ umbeschrieben ist, zugleich das dritte Fokalzentrum C_0 und den weiteren noch von P durchlaufenen Doppelpunkt enthält; ferner berühren sich die drei Polkurvenpaare und die drei Kreispunktkurven[3]. Abb. 10 zeigt die betreffende Konfiguration mit den Gelenk-

[1] Bei gegebenem Kreis $\varkappa$ und den hierdurch möglichen Wertepaaren A_0, B_0 ist der für die Folge der Punkte H mögliche Raum durch die Fußpunkte der von P auf die Kreistangenten gefällten Lote bestimmt, d. h. durch eine Kardioide, deren Spitze in P und deren Flachpunkt in K liegt.

[2] Vgl. Fußnote 4 von S. 308.

[3] Und auch die drei Übergangskurven.

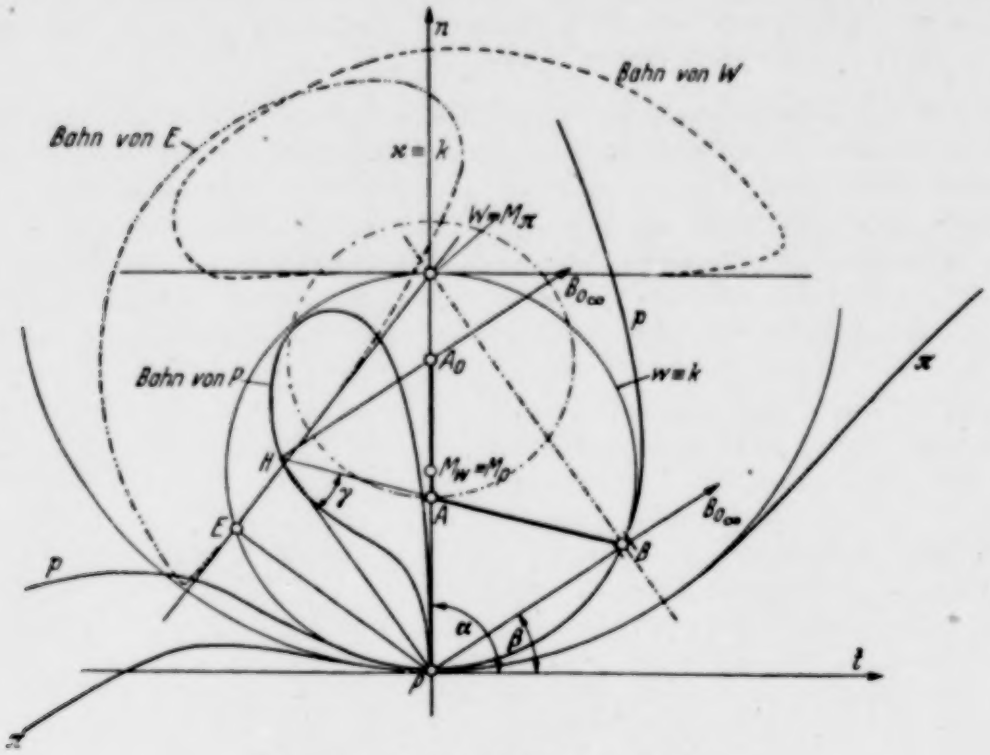


Abb. 9. Der Schubkurbeltrieb in der Kardanlage.

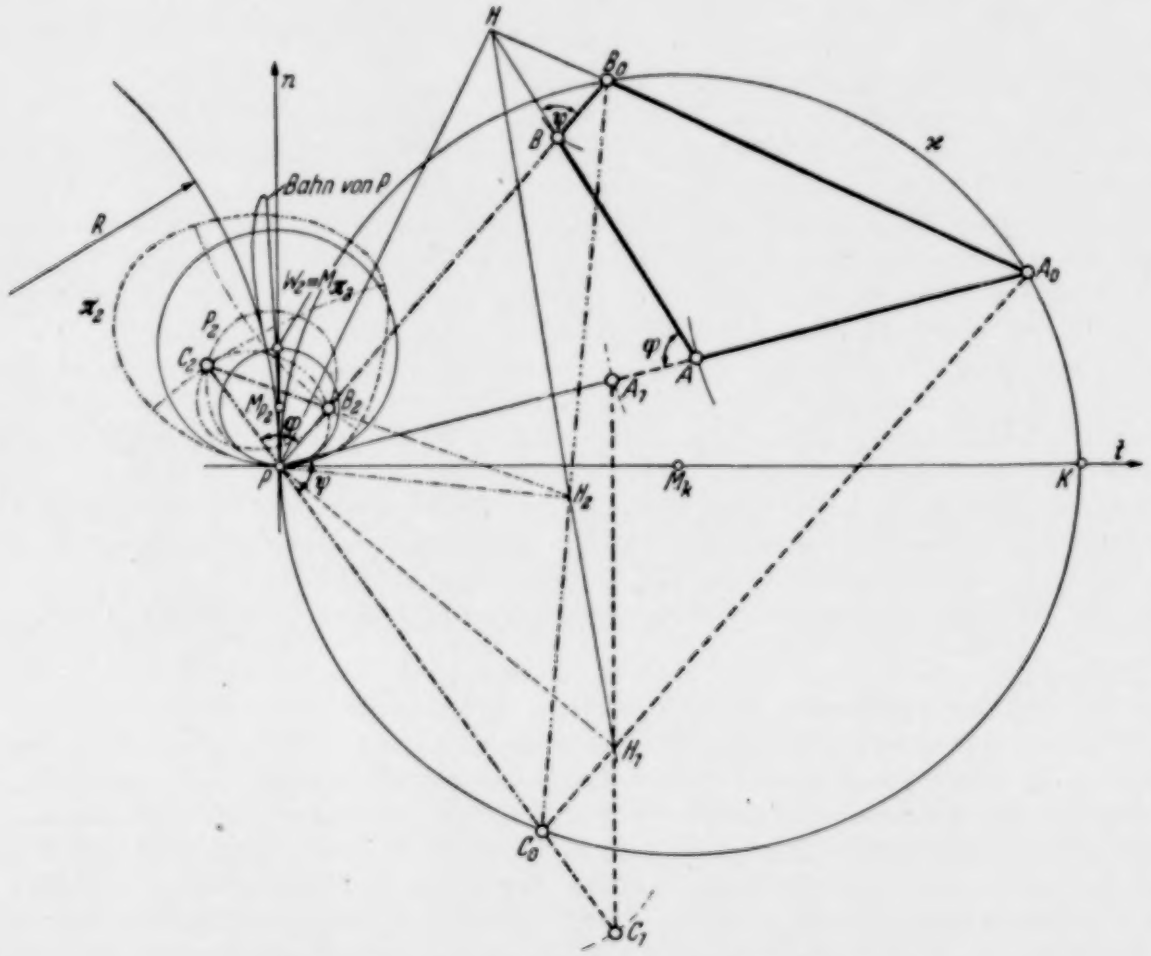


Abb. 10. Die *Robertssche* Konfiguration für die Kardanlage.

vierecken $A_0 B_0 B A$, $A_0 C_0 C_1 A_1$, $B_0 C_0 C_2 B_2$, wobei $A_0 A_1 = P A_1$ und $B_0 B_2 = P B$ sein und die eingetragene Winkelgleichheit bestehen muß. Beim Entwurf der Abb. 10 waren P, K, A_0, B_0 und C_0 angenommen worden.

Die Wendekreisdurchmesser brauchen nicht, wie auch aus Abb. 10 leicht zu erkennen ist, übereinzustimmen; doch müssen, da die Werte m und R übereinstimmen, gemäß (2b) und (9) die Proportionen $\vartheta_1' : \vartheta_2' : \vartheta_3' = \vartheta_1'' : \vartheta_2'' : \vartheta_3'' = \tau_1'' : \tau_2'' : \tau_3''$ gelten.

8. Stationäre Werte. Zuletzt besteht noch die Aufgabe, festzustellen, ob irgendeine der betrachteten kennzeichnenden Größen in der Kardanlage einen stationären Wert hat:

a) Bei sechspunktig berührendem Krümmungskreis in P wird $\tau'' = 0$ (Ziff. 3 u. 5d). Da τ' die Krümmung der festen Polbahn ist, hat diese einen Extremalwert.

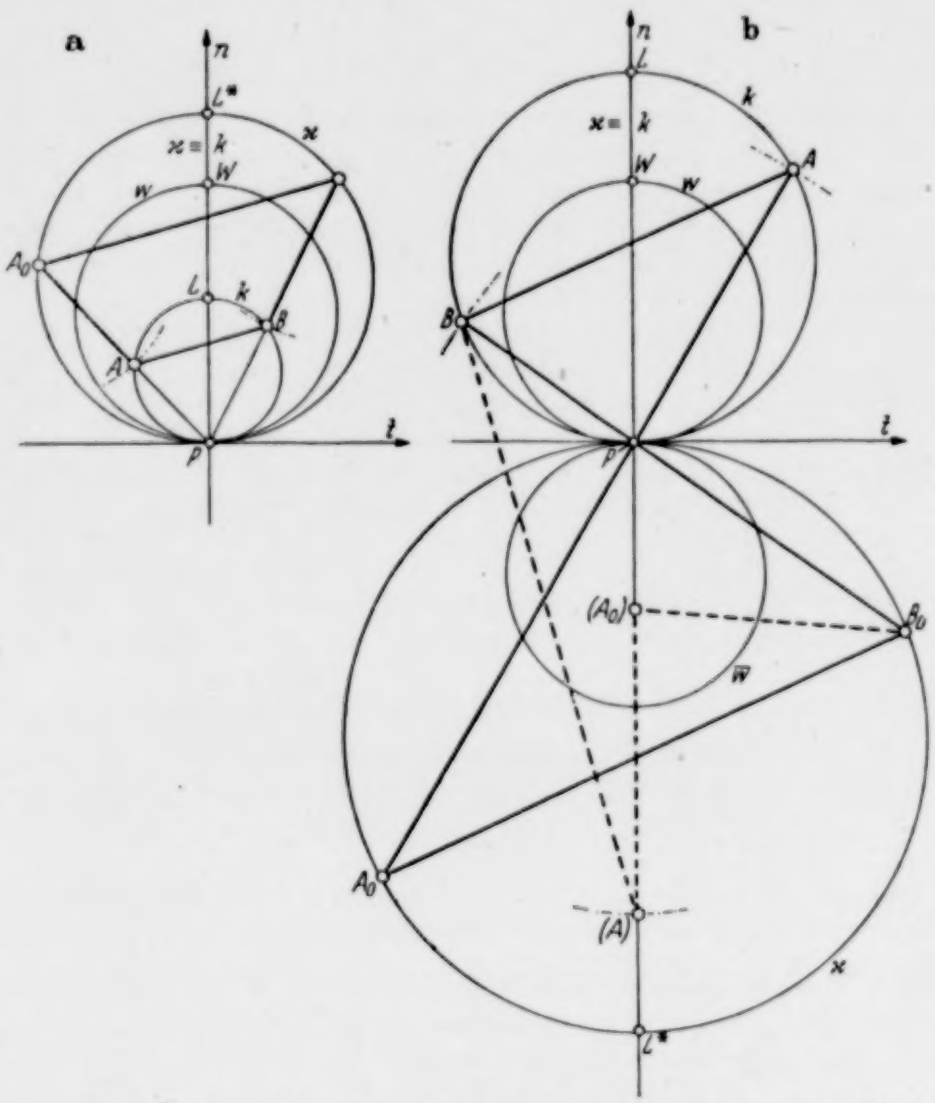


Abb. 11. Stellungen des Gelenkvierecks für stationären Wendekreisdurchmesser.

b) Ist $R = m$ (Ziff. 5b), so ist $\tau'' = \vartheta''$. Da aber die Krümmung der Polbahnen im nächsten Augenblick durch $\tau' + \tau'' ds$ bzw. $\vartheta' + \vartheta'' ds + \tau' + \tau'' ds$ gegeben ist, τ' aber gleich ϑ' war, so bleibt das Verhältnis der Krümmungen das gleiche, ist also das System auch im nächsten Augenblick in einer Kardanlage.

c) *Rauh*[1] sagt, daß der Wendekreisdurchmesser in der Kardanlage beim Gelenkviereck ein Minimum hat, während *Alt*[2] feststellt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Die Bedingung für ein Extremum ist $\vartheta'' = 0$, und diese ist (Ziff. 6b) nur beim Schubkurbeltrieb (und dem daraus abgeleiteten Schleifschieber), aber nicht beim allgemeinen Gelenkviereck (einschließlich der Kurbelschleife) möglich.

Zur Klärung muß jedoch kurz, unabhängig von der Kardanlage, auf die Bedingung $\vartheta'' = 0$ für ein Extremum in d_w eingegangen werden. Nach (9) bedeutet dies, daß lediglich $m \to \infty$ geht, also die Kurve k in die Polbahntangente t und den Kreis L und die Kurve $\varkappa$ in t und den Kreis L^* entartet (Abb. 11). Geben wir uns t, W, L und damit L^*, so zeigt sich, daß bei festen Punkten

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 308.
[2] Vgl. Fußnote 2 von S. 308.

A_0, B_0 Gelenkvierecke entstehen, bei denen Steg und Koppel parallel sind, also H unendlich fern liegt, oder bei denen, wenn B_0 auf der Polbahnnormalen angenommen wird (Abb. 11 b), die Kurbel A_0A auf dieser liegt, oder bei denen eine Strecklage vorliegt, wenn alle vier Punkte auf n fallen.

Durch l und l^* sind nach obigem die Mittelpunkte M_π, M_p gemäß

$$\frac{1}{\varrho_\pi} = \frac{1}{l} + \frac{2}{l^*} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_p} = \frac{2}{l} + \frac{1}{l^*}$$

bestimmt oder folgen umgekehrt l und l^* aus

$$\frac{1}{l^*} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varrho_\pi} - \frac{1}{r_p}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{\varrho_\pi}\right).$$

Sind z. B. ϱ_π und r_p konstant, d. h., liegt eine zyklische Bewegung vor, so sind hiernach l und l^* neben d_w leicht zu erhalten[1]. Bei den in Abb. 11 für $\vartheta'' = 0$ herzuleitenden Gelenkvierecken kann sich aber keines in einer Kardanlage befinden; denn dies erfordert ein Zusammenfallen von W und L, so daß eben, wie oben ausgeführt, nur Schubkurbeltriebe entstehen können, es sei denn, wenn man nur die Bedingung $\vartheta'' = 0$, also ein Extremum des Wendekreisdurchmessers als Grundlage einer Kardanlage definiert.

Die Kardanlage, zu der wir, ausgehend von der Bahn des Momentanpols, gelangten, ist nach vorstehendem durch vier unendlich benachbarte Lagen gekennzeichnet. Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der von P beschriebenen Bahnstelle ist aber noch der Wert von τ'' erforderlich, d. h. aber eine fünfte unendlich benachbarte Lage. Diese ist z. B. dadurch festgelegt, daß wir einem Bahnpunkt einen fünfpunktig berührenden Krümmungskreis zuschreiben, wie dies beim Gelenkviereck für die Bahnpunkte A und B der Fall ist.

[1] Vgl. z. B. *W. Meyer zur Capellen*, Getriebetechn. 4 (1936) 44.

(Eingegangen am 10. September 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Walther Meyer zur Capellen*, (22c) Aachen, Maria-Theresia-Allee 22.

Der homogene, durchlaufende Träger auf unverschieblichen Stützen.

Von J. Fadle.

1. Einleitung[1]. Eine Grundaufgabe der Baustatik bildet die Behandlung des durchlaufenden elastischen Trägers, der auf $n+1$ Stützen unverschieblich, aber frei drehbar gelagert ist. Die Stetigkeitsbedingungen für die Biegewinkel an jeder einzelnen Stütze liefern für einen Träger mit feldweise konstanter Biegesteifigkeit EJ_x die *Clapeyron*sche Gleichung[2] in der Form

$$M_{x-1}\frac{l_x}{J_x}+2\,M_x\left(\frac{l_x}{J_x}+\frac{l_{x+1}}{J_{x+1}}\right)+M_{x+1}\frac{l_{x+1}}{J}=\frac{P_x}{J_x}\,\frac{p_x(l_x-p_x)(l_x+p_x)}{l_x}+$$
$$+\frac{P_{x+1}}{J_{x+1}}\,\frac{p_{x+1}(l_{x+1}-p_{x+1})(2\,l_{x+1}-p_{x+1})}{l_{x+1}}.$$

Es bedeuten hierin

M_{x-1}, M_x, M_{x+1}	Stützmomente über den aufeinander folgenden Stützen $x-1$, x, $x+1$ (positiv, wenn am linken abgeschnittenen Balkenteil entgegen dem Uhrzeigersinn drehend);
P_x, P_{x+1}	Einzellasten im Felde x bzw. $x+1$;
J_x, J_{x+1}	Trägheitsmomente im Feld x bzw. $x+1$;
l_x, l_{x+1}	Stützweiten der Felder x bzw. $x+1$;
p_x, p_{x+1}	Abstände der Einzellasten P_x von der Stütze $x-1$ bzw. P_{x+1} von der Stütze x.

Die *Clapeyron*sche Gleichung, in die außer dem Stützmoment M_x noch die benachbarten Stützmomente M_{x-1} und M_{x+1} eingehen, stellt einen Zusammenhang her zwischen je drei aufeinander folgenden Stützmomenten und den Belastungen der zur Stütze x benachbarten Felder und wird daher auch als Dreimomentengleichung bezeichnet. Für einen an den Endstützen frei aufgelagerten Träger sind die Randstützmomente M_0 und M_n gleich Null und es folgen $n-1$ Dreimomentengleichungen, die zur Berechnung der $n-1$ statisch unbestimmten Stützmomente $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ ausreichen.

Für den Fall eingespannter Endstützen treten zwei weitere Gleichungen hinzu

$$2\,M_0+M_1=P_1 l_1\,\frac{p_1}{l_1}\left(1-\frac{p_1}{l_1}\right)\left(2-\frac{p_1}{l_1}\right),$$

$$M_{n-1}+2\,M_n=P_n l_n\,\frac{p_n}{l_n}\left(1-\frac{p_n}{l_n}\right)\left(1-\frac{p_n}{l_n}\right),$$

welche die Bedingung für die horizontalen Biegewinkel an den Endstützen aussprechen. Es folgen somit $n+1$ Gleichungen zur Berechnung der $n+1$ Stützmomente $M_0, M_1, \ldots M_n$.

2. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung des homogenen, durchlaufenden Trägers. Ein durchlaufender Träger mit gleichen Stützweiten l und gleicher Belastung aller Felder wird als homogener durchlaufender Träger bezeichnet, für den die *Clapeyron*sche Dreimomentengleichung in die einfache Form übergeht

$$M_{x-1}+4\,M_x+M_{x+1}=B\begin{cases}=3\,P\,\dfrac{p(l-p)}{l}\ \text{für Einzellasten.}\\[2ex]=\dfrac{3}{l}\displaystyle\int_0^l\xi\,(l-\xi)\,q(\xi)\,d\xi\ \text{für Streckenlasten.}\end{cases}\qquad(1)$$

Da das Glied auf der rechten Seite den Einfluß der Belastung durch Einzelkräfte oder Streckenlasten darstellt, wird es sinngemäß als Belastungsglied B bezeichnet. Gleichung (1) ist eine inhomogene Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Belastungsglied für den vorliegenden Fall gleicher Feldbelastungen eine Konstante ist. Ihre allgemeine Lösung wurde schon von *Clebsch*[3] durch den Ansatz

$$M_x=\frac{B}{6}+Cr^x\qquad(2)$$

---

[1] Die Anregung zu diesem Aufsatz verdanke ich Herrn Professor *Pöschl*, der in seiner Vorlesung über „Höhere Festigkeitslehre" auf die in der bisher bekannten Literatur nicht erschöpfende Behandlung des homogenen Trägers hinwies.

[2] *Hütte*, Bd. I, 27. Aufl., S. 680, Berlin 1948 – *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, S. 231, Berlin 1939 – *E. Mörsch*, Der durchlaufende Träger, S. 45, Stuttgart 1946.

[3] *A. Clebsch*, Theorie der Elastizität fester Körper, S. 394. Leipzig 1862. *Bleich-Melan*, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik, S. 167. Berlin 1927.

angegeben. Geht man mit dem Ansatz (2) in (1) ein, so erhält man nach einfacher Umformung die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 4r + 1 = 0 \tag{3}$$

mit den beiden Wurzeln

$$r_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad r_2 = -2 - \sqrt{3}, \quad r_1 r_2 = 1. \tag{4}$$

Die allgemeine Lösung von (1) lautet nun mit den beiden Auflösungskonstanten C_1' und C_2' und wenn noch $r_1 = r$ gesetzt wird

$$M_x = \frac{B}{6} + C_1' r^x + C_2' r^{-x}, \tag{5}$$

wobei C_1' und C_2' aus den beiden Randauflagerbedingungen zu bestimmen sind.

3. Rekursionsformeln und Additionstheoreme konjugierter Zahlen zur Darstellung der Potenzen von r^m und r^{-m}. Setzt man allgemein für ganze Zahlen m

$$r^m = (-2 + \sqrt{3})^m = a_m + \sqrt{3}\, b_m, \quad r^{-m} = (-2 + \sqrt{3})^{-m} = (-2 - \sqrt{3})^m = a_m - \sqrt{3}\, b_m, \tag{6}$$

so wird

$$r^m + r^{-m} = 2 a_m, \quad r^m - r^{-m} = 2\sqrt{3}\, b_m. \tag{6a}$$

Nach Multiplikation der charakteristischen Gleichung (3) mit r^{m-2} kommt weiter in Zusammenhang mit (6)

$$r^{m-2} + 4 r^{m-1} + r^m = (a_{m-2} + 4 a_{m-1} + a_m) + \sqrt{3}\,(b_{m-2} + 4 b_{m-1} + b_m) = 0,$$

woraus sich die Rekursionsformel zur Berechnung von a_m und b_m ergibt

$$a_m = -(4 a_{m-1} + a_{m-2}), \quad b_m = -(4 b_{m-1} + b_{m-2}), \tag{6b}$$

Nun ist

$$r^0 = 1 \qquad = a_0 + \sqrt{3}\, b_0, \quad \text{d. h. } a_0 = 1, \; b_0 = 0;$$

$$r^1 = -2 + \sqrt{3} = a_1 + \sqrt{3}\, b_1, \quad \text{d. h. } a_1 = -2, \; b_1 = 1,$$

und es kommt

$$a_2 = -(-8 + 1) = +7, \quad b_2 = -(+4 + 0) = -4, \quad \text{usw.}$$

In der folgenden Tabelle (6c) sind die Werte für a_m und b_m bis $m = 12$ zusammengestellt.

m	a_m	b_m
0	+ 1	0
1	− 2	+ 1
2	+ 7	− 4
3	− 26	+ 15
4	+ 97	− 56
5	− 362	+ 209
6	+ 1 351	− 780
7	− 5 042	+ 2 911
8	+ 18 817	− 10 864
9	− 70 226	+ 40 545
10	+ 262 087	− 151 316
11	− 978 122	+ 564 719
12	+ 3 659 401	− 2 107 560

(6c)

Aus (6c) können wir sofort folgendes Vorzeichengesetz feststellen:

$$a_m = (-1)^m |a_m|, \quad b_m = (-1)^{m+1} |b_m|, \tag{6d}$$

Aus der Definitionsgleichung (3a) ergeben sich für zwei verschiedene Potenzexponenten m und n folgende Zusammenhänge

$$(r^m \pm r^{-m})(r^n \pm r^{-n}) \equiv (r^{m+n} + r^{-m-n}) \pm (r^{m-n} + r^{-m+n}),$$

$$2 a_m a_n = a_{m+n} + a_{m-n}, \quad 6 b_m b_n = a_{m+n} - a_{m-n}$$

und

$$(r^m \pm r^{-m})(r^n \mp r^{-n}) \equiv (r^{m+n} - r^{-m-n}) \mp (r^{m-n} - r^{-m+n}),$$

$$2 a_m b_n = b_{m+n} - b_{m-n}, \quad 2 a_n b_m = b_{m+n} + b_{m-n}.$$

Durch geeignete Zusammenfassung folgen schließlich die Additionstheoreme der konjugierten Zahlen in der Form

$$a_{m\pm n} = a_m\, a_n \pm 3\, b_m\, b_n, \qquad b_{m\pm n} = b_m\, a_n \pm b_n\, a_m. \tag{7}$$

Im besonderen wird für $n=1$

$$a_{m\pm 1} + 2\, a_m = \pm 3\, b_m, \qquad b_{m\pm 1} + 2\, b_m = \pm a_m. \tag{7a}$$

Weiter leiten wir noch folgende Zusammenhänge für drei ganze Zahlen m, n und k her:

$$\left.\begin{aligned} b_{n-k}\, b_m - b_n\, b_{m-k} &= b_k\, b_{n-m}, \\ a_{n-k}\, a_m - 3\, b_n\, b_{m-k} &= a_k\, a_{n-m}, \\ b_{n-k}\, a_m - a_n\, b_{m-k} &= a_k\, b_{n-m}. \end{aligned}\right\} \tag{7b}$$

Mit den entwickelten Formeln lassen sich nunmehr Stützmomente und Auflagerkräfte für die drei möglichen Randauflagerungen bei verschiedenen Belastungsarten besonders anschaulich ableiten.

4. Der homogene durchlaufende Träger. a) Freie Auflagerung der Endstützen: $M_0=0$, $M_n=0$. Es erweist sich zweckmäßig, Gleichung (5) durch geeignete Umformung auf die konjugierten Zahlen a_x und b_x zurückzuführen. Zu diesem Zweck setzen wir

$$M_x = \frac{B}{6} + \frac{C'_1+C'_2}{2}\,(r^x + r^{-x}) + \frac{C'_1-C'_2}{2}\,(r^x - r^{-x}) = \frac{B}{6} + C_1 a_x + C_2 b_x. \tag{8}$$

C_1 und C_2 folgen aus den Randbedingungen für $x=0$ und $x=n$

$$x=0:\ M_0 = 0 = \frac{B}{6} + C_1, \qquad C_1 = -\frac{B}{6};$$

$$x=n:\ M_n = 0 = \frac{B}{6} - \frac{B}{6}\,a_n + C_2\, b_n, \qquad C_2 = -\frac{B}{6}\,\frac{1-a_n}{b_n}.$$

Unter Beachtung von (7) kommt schließlich

$$M_x = \frac{C}{6}\left(1 - a_x - \frac{1-a_n}{b_n}\,b_x\right) = \frac{B}{6}\,\frac{b_n-(b_n\,a_x-b_x\,a_n)-b_x}{b_n} = \frac{B}{6}\,\frac{b_n-b_{n-x}-b_x}{b_n}. \tag{9}$$

Durch Vertauschung von x mit $n-x$ geht (9) in sich selbst über, woraus die Symmetriebedingung $M_{n-x}=M_x$ folgt.

b) Starre Einspannung beider Endstützen. Bezeichnen wir mit B_1 und B_2 das Belastungsglied für ein linkes bzw. für ein rechtes Auflager, wobei $B_1+B_2=B$ ist, so lauten bekanntlich die Bedingungen für eine horizontale Tangente der Biegelinie an den Einspannstellen

$$x=0:\ 2\,M_0 + M_1 = B_1 = \frac{B}{2} + C_1\,(2\,a_0 + a_1) + C_2\,(2\,b_0 + b_1) = \frac{B}{2} + 3\,C_1\,b_0 + C_2\,a_0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\,(B_1 - B_2),$$

$$x=n:\ M_{n-1} + 2\,M_n = B_2 = \frac{B}{2} + C_1\,(a_{n-1} + 2\,a_n) + \frac{1}{2}\,(B_1-B_2)\,(b_{n-1} + 2\,b_n) =$$

$$= \frac{B}{2} - 3\,C_1\,b_n - \frac{1}{2}\,(B_1-B_2)\,a_n, \qquad C_1 = -\frac{a_n-1}{6\,b_n}\,(B_1-B_2).$$

Führt man C_1 und C_2 in (8) ein, so kommt

$$M_x = \frac{B_1+B_2}{6} - \frac{B_1-B_2}{6\,b_n}\left[(a_n\,a_x - 3\,b_n\,b_x) - a_x\right] = \frac{b_n+a_x-a_{n-x}}{6\,b_n}\,B_1 + \frac{b_n-a_x+a_{n-x}}{6\,b_n}\,B_2. \tag{10}$$

Vertauschen wir in (10) x mit $n-x$, so gehen die Beiwerte von B_1 in diejenigen von B_2 über, d. h. es liegt Polarsymmetrie vor, wie es auch sein muß, wenn wir die Zählung nicht von links, sondern von rechts beginnen.

Weiter erkennen wir die Dualität der konjugierten Zahlen a_x und b_x; denn die b_x und b_{n-x} sind wegen $b_0=0$ charakteristisch für die freie Randstützenlagerung ($M_0=M_n=0$), die a_x und a_{n-x} hingegen sind wegen $2\,a_0+a_1=0$ charakteristisch für die starre Einspannung ($2\,M_0+M_1=B_1$, $M_{n-1}+2\,M_n=B_2$). Diese Dualität wird besonders schön bei der Behandlung des Trägers mit gleichen Feldlängen und einem einzigen, beliebig belasteten Feld in Erscheinung treten.

c) Gemischte Randstützenlagerung: erste Stütze starr eingespannt, letzte Stütze frei aufgelagert. Da hier wegen der Einspannung der ersten Stütze dieselbe Randbedingung wie in Fall *b*) gilt, übernehmen wir sofort das dortige Ergebnis mit $C_2=\frac{1}{2}\,(B_1-B_2)$.

Die freie Auflagerung der letzten Stütze hingegen erfordert die Randbedingung

$$x = n\colon\ M_n = 0 = \frac{B}{6} + C_1 a_n + \frac{1}{2}(B_1 - B_2) b_n, \qquad C_1 = -(B_1 - B_2)\frac{b_n}{2 a_n} - (B_1 + B_2)\frac{1}{6 a_n}.$$

Mit diesen Werten für C_1 und C_2 wird das Stützmoment

$$M_x = (B_1 + B_2)\frac{a_n - a_x}{6 a_n} - (B_1 - B_2)\frac{b_n a_x - b_x a_n}{2 a_n} = \frac{a_n - a_x - 3 b_{n-x}}{6 a_n} B_1 + \frac{a_n - a_x + 3 b_{n-x}}{6 a_n} B_2. \quad (11)$$

In den folgenden Tabellen 1 bis 3 sind die nach a) bis c) ermittelten Stützmomente für homogene Träger bis zu 12 Feldern in Form von Zahlenpyramiden zusammengestellt.

1. Tabelle der Stützmomente $\frac{M_x}{B} = \frac{b_n - b_x - b_{n-x}}{6 b_n}$ *für freie Auflagerung beider Endstützen.*

$n=1$	0	0										
$n=2$	0	$\frac{1}{4}$	0									
$n=3$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0								
$n=4$	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	0							
$n=5$	0	$\frac{4}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{19}$	0						
$n=6$	0	$\frac{11}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{11}{52}$	0					
$n=7$	0	$\frac{15}{71}$	$\frac{11}{71}$	$\frac{12}{71}$	$\frac{12}{71}$	$\frac{11}{71}$	$\frac{15}{71}$	0				
$n=8$	0	$\frac{41}{194}$	$\frac{30}{194}$	$\frac{33}{194}$	$\frac{32}{194}$	$\frac{33}{194}$	$\frac{30}{194}$	$\frac{41}{194}$	0			
$n=9$	0	$\frac{56}{265}$	$\frac{41}{265}$	$\frac{45}{265}$	$\frac{44}{265}$	$\frac{44}{265}$	$\frac{45}{265}$	$\frac{41}{265}$	$\frac{56}{265}$	0		
$n=10$	0	$\frac{153}{724}$	$\frac{112}{724}$	$\frac{123}{724}$	$\frac{120}{724}$	$\frac{121}{724}$	$\frac{120}{724}$	$\frac{123}{724}$	$\frac{112}{724}$	$\frac{153}{724}$	0	
$n=11$	0	$\frac{209}{989}$	$\frac{153}{989}$	$\frac{168}{989}$	$\frac{164}{989}$	$\frac{165}{989}$	$\frac{165}{989}$	$\frac{164}{989}$	$\frac{168}{989}$	$\frac{153}{989}$	$\frac{209}{989}$	0
$n=12$	0	$\frac{571}{2702}$	$\frac{418}{2702}$	$\frac{459}{2702}$	$\frac{448}{2702}$	$\frac{451}{2702}$	$\frac{450}{2702}$	$\frac{451}{2702}$	$\frac{448}{2702}$	$\frac{459}{2702}$	$\frac{418}{2702}$	$\frac{571}{2702}$	0

d) Ermittlung der Auflagerkräfte. Denken wir uns in bekannter Weise nach Abb. 1 zwei benachbarte Felder x und $x+1$ durch Schnitte über den Stützen in Einzelfelder aufgelöst, wobei die Stützmomente als äußere Momente einzuführen sind, so erhalten wir für die Anteile A'_x von Feld x und A''_x von Feld $x+1$ zur Auflagerkraft A_x

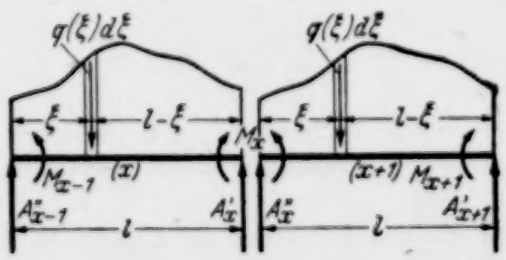


Abb. 1. Zur Bestimmung der Auflagerkräfte des homogenen Trägers.

$$\left.\begin{aligned} A'_x &= \frac{M_x - M_{x-1}}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l \xi\, q(\xi)\, d\xi, \\ A''_x &= \frac{M_x - M_{x+1}}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

und

$$A_x = A'_x + A''_x = \frac{-M_{x-1} + 2 M_x - M_{x+1}}{l} + \int_0^l q(\xi)\, d\xi. \quad (12a)$$

Schließlich kommt mit (1) nach einfacher Umformung

$$A_x = 6\frac{M_x}{l} + \frac{1}{l^2}\int_0^l (l^2 - 3 l \xi + 3 \xi^2)\, q(\xi)\, d\xi = 6\frac{M_x}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l [\xi^3 + (l-\xi)^3]\, q(\xi)\, d\xi. \quad (13)$$

2. Tabelle der Stützmomente

$$M_x = \frac{b_n + a_x - a_{n-x}}{6\,b_n} B_1 + \frac{b_n - a_x + a_{n-x}}{6\,b_n} B_2$$

für starre Einspannung beider Endstützen.

$n=1$	$\frac{2}{3}B_1 - \frac{1}{3}B_2$	$-\frac{1}{3}B_1 + \frac{2}{3}B_2$									
$n=2$	$\frac{5}{12}B_1 - \frac{1}{12}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$-\frac{1}{12}B_1 + \frac{5}{12}B_2$								
$n=3$	$\frac{7}{15}B_1 - \frac{2}{15}B_2$	$\frac{1}{15}B_1 + \frac{4}{15}B_2$	$\frac{4}{15}B_1 + \frac{1}{15}B_2$	$-\frac{2}{15}B_1 + \frac{7}{15}B_2$							
$n=4$	$\frac{19}{42}B_1 - \frac{5}{42}B_2$	$\frac{4}{42}B_1 + \frac{10}{42}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$\frac{10}{42}B_1 + \frac{4}{42}B_2$	$-\frac{5}{42}B_1 + \frac{19}{42}B_2$						
$n=5$	$\frac{23}{57}B_1 - \frac{7}{57}B_2$	$\frac{5}{57}B_1 + \frac{14}{57}B_2$	$\frac{11}{57}B_1 + \frac{8}{57}B_2$	$\frac{8}{57}B_1 + \frac{11}{57}B_2$	$\frac{14}{57}B_1 + \frac{5}{57}B_2$	$-\frac{7}{57}B_1 + \frac{26}{57}B_2$					
$n=6$	$\frac{71}{156}B_1 - \frac{19}{156}B_2$	$\frac{14}{156}B_1 + \frac{38}{156}B_2$	$\frac{29}{156}B_1 + \frac{23}{156}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$\frac{23}{156}B_1 + \frac{29}{156}B_2$	$\frac{38}{156}B_1 + \frac{14}{156}B_2$	$-\frac{19}{156}B_1 + \frac{71}{156}B_2$				
$n=7$	$\frac{97}{213}B_1 - \frac{26}{213}B_2$	$\frac{19}{213}B_1 + \frac{52}{213}B_2$	$\frac{40}{213}B_1 + \frac{31}{213}B_2$	$\frac{34}{213}B_1 + \frac{37}{213}B_2$	$\frac{37}{213}B_1 + \frac{34}{213}B_2$	$\frac{31}{213}B_1 + \frac{40}{213}B_2$	$\frac{52}{213}B_1 + \frac{19}{213}B_2$	$-\frac{26}{213}B_1 + \frac{97}{213}B_2$			
$n=8$	$\frac{265}{582}B_1 - \frac{71}{582}B_2$	$\frac{52}{582}B_1 + \frac{142}{582}B_2$	$\frac{109}{582}B_1 + \frac{85}{582}B_2$	$\frac{94}{582}B_1 + \frac{100}{582}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$\frac{100}{582}B_1 + \frac{94}{582}B_2$	$\frac{85}{582}B_1 + \frac{109}{582}B_2$	$\frac{142}{582}B_1 + \frac{52}{582}B_2$	$-\frac{71}{582}B_1 + \frac{265}{582}B_2$		
$n=9$	$\frac{362}{795}B_1 - \frac{97}{795}B_2$	$\frac{71}{795}B_1 + \frac{194}{795}B_2$	$\frac{149}{795}B_1 + \frac{116}{795}B_2$	$\frac{128}{795}B_1 + \frac{137}{795}B_2$	$\frac{134}{795}B_1 + \frac{131}{795}B_2$	$\frac{131}{795}B_1 + \frac{134}{795}B_2$	$\frac{137}{795}B_1 + \frac{128}{795}B_2$	$\frac{116}{795}B_1 + \frac{149}{795}B_2$	$\frac{194}{795}B_1 + \frac{71}{795}B_2$	$-\frac{97}{795}B_1 + \frac{362}{795}B_2$	
$n=10$	$\frac{989}{2172}B_1 - \frac{265}{2172}B_2$	$\frac{194}{2172}B_1 + \frac{530}{2172}B_2$	$\frac{407}{2172}B_1 + \frac{317}{2172}B_2$	$\frac{350}{2172}B_1 + \frac{374}{2172}B_2$	$\frac{365}{2172}B_1 + \frac{359}{2172}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$\frac{359}{2172}B_1 + \frac{365}{2172}B_2$	$\frac{374}{2172}B_1 + \frac{350}{2172}B_2$	$\frac{317}{2172}B_1 + \frac{407}{2172}B_2$	$\frac{530}{2172}B_1 + \frac{194}{2172}B_2$	$-\frac{265}{2172}B_1 + \frac{989}{2172}B_2$
$n=11$	$\frac{1351}{2967}B_1 - \frac{362}{2967}B_2$	$\frac{265}{2967}B_1 + \frac{724}{2967}B_2$	$\frac{556}{2967}B_1 + \frac{433}{2967}B_2$	$\frac{478}{2967}B_1 + \frac{511}{2967}B_2$	$\frac{499}{2967}B_1 + \frac{490}{2967}B_2$	$\frac{493}{2967}B_1 + \frac{496}{2967}B_2$	$\frac{496}{2967}B_1 + \frac{493}{2967}B_2$	$\frac{490}{2967}B_1 + \frac{499}{2967}B_2$	$\frac{511}{2967}B_1 + \frac{478}{2967}B_2$	$\frac{433}{2967}B_1 + \frac{556}{2967}B_2$	$\frac{724}{2967}B_1 + \frac{265}{2967}B_2$	$-\frac{362}{2967}B_1 + \frac{1351}{2967}B_2$
$n=12$	$\frac{3691}{8106}B_1 - \frac{989}{8106}B_2$	$\frac{724}{8106}B_1 + \frac{1978}{8106}B_2$	$\frac{1519}{8106}B_1 + \frac{1183}{8106}B_2$	$\frac{1306}{8106}B_1 + \frac{1396}{8106}B_2$	$\frac{1363}{8106}B_1 + \frac{1339}{8106}B_2$	$\frac{1348}{8106}B_1 + \frac{1351}{8106}B_2$	$\frac{1}{6}B$	$\frac{1351}{8106}B_1 + \frac{1348}{8106}B_2$	$\frac{1339}{8106}B_1 + \frac{1363}{8106}B_2$	$\frac{1396}{8106}B_1 + \frac{1306}{8106}B_2$	$\frac{1183}{8106}B_1 + \frac{1519}{8106}B_2$	$\frac{1978}{8106}B_1 + \frac{724}{8106}B_2$	$-\frac{989}{8106}B_1 + \frac{3691}{8106}B_2$

3. Tabelle der Stützmomente

$$M_x = \frac{a_n - a_x - 3b_{n-x}}{6\,a_n} B_1 + \frac{a_n - a_x + 3b_{n-x}}{6\,a_n} B_2$$

für starre Einspannung der ersten und freie Auflagerung der letzten Stütze.

$n=1$	$\frac{1}{2}B_1$ 0	0							
$n=2$	$\frac{3}{7}B_1$ $-\frac{1}{7}B_2$	$\frac{1}{7}B_1$ $+\frac{2}{7}B_2$	0						
$n=3$	$\frac{12}{26}B_1$ $-\frac{3}{26}B_2$	$\frac{2}{26}B_1$ $+\frac{6}{26}B_2$	$\frac{6}{26}B_1$ $+\frac{5}{26}B_2$	0					
$n=4$	$\frac{44}{97}B_1$ $-\frac{12}{97}B_2$	$\frac{9}{97}B_1$ $+\frac{24}{97}B_2$	$\frac{17}{97}B_1$ $+\frac{13}{97}B_2$	$\frac{20}{97}B_1$ $+\frac{21}{97}B_2$	0				
$n=5$	$\frac{165}{362}B_1$ $-\frac{44}{362}B_2$	$\frac{32}{362}B_1$ $+\frac{88}{362}B_2$	$\frac{69}{362}B_1$ $+\frac{54}{362}B_2$	$\frac{54}{362}B_1$ $+\frac{58}{362}B_2$	$\frac{77}{362}B_1$ $+\frac{76}{362}B_2$	0			
$n=6$	$\frac{615}{1351}B_1$ $-\frac{165}{1351}B_2$	$\frac{121}{1351}B_1$ $+\frac{330}{1351}B_2$	$\frac{252}{1351}B_1$ $+\frac{196}{1351}B_2$	$\frac{222}{1351}B_1$ $+\frac{237}{1351}B_2$	$\frac{211}{1351}B_1$ $+\frac{207}{1351}B_2$	$\frac{285}{1351}B_1$ $+\frac{286}{1351}B_2$	0		
$n=7$	$\frac{2296}{5042}B_1$ $-\frac{615}{5042}B_2$	$\frac{450}{5042}B_1$ $+\frac{1230}{5042}B_2$	$\frac{946}{5042}B_1$ $+\frac{737}{5042}B_2$	$\frac{808}{5042}B_1$ $+\frac{864}{5042}B_2$	$\frac{864}{5042}B_1$ $+\frac{849}{5042}B_2$	$\frac{778}{5042}B_1$ $+\frac{782}{5042}B_2$	$\frac{1066}{5042}B_1$ $+\frac{1065}{5042}B_2$	0	
$n=8$	$\frac{8568}{18817}B_1$ $-\frac{2296}{18817}B_2$	$\frac{1681}{18817}B_1$ $+\frac{4592}{18817}B_2$	$\frac{3525}{18817}B_1$ $+\frac{2745}{18817}B_2$	$\frac{3036}{18817}B_1$ $+\frac{3245}{18817}B_2$	$\frac{3148}{18817}B_1$ $+\frac{3092}{18817}B_2$	$\frac{3189}{18817}B_1$ $+\frac{3204}{18817}B_2$	$\frac{2913}{18817}B_1$ $+\frac{2909}{18817}B_2$	$\frac{3976}{18817}B_1$ $+\frac{3977}{18817}B_2$	0
$n=9$	$\frac{31977}{70226}B_1$ $-\frac{8568}{70226}B_2$	$\frac{6272}{70226}B_1$ $+\frac{17136}{70226}B_2$	$\frac{13161}{70226}B_1$ $+\frac{10250}{70226}B_2$	$\frac{11310}{70226}B_1$ $+\frac{12090}{70226}B_2$	$\frac{11825}{70226}B_1$ $+\frac{11616}{70226}B_2$	$\frac{11616}{70226}B_1$ $+\frac{11672}{70226}B_2$	$\frac{11937}{70226}B_1$ $+\frac{11922}{70226}B_2$	$\frac{10862}{70226}B_1$ $+\frac{10366}{70226}B_2$	$\frac{14341}{70226}B_1$ $+\frac{14840}{70226}B_2$	0
$n=10$	$\frac{119339}{262087}B_1$ $-\frac{31977}{262087}B_2$	$\frac{23409}{262087}B_1$ $+\frac{63954}{262087}B_2$	$\frac{49112}{262087}B_1$ $+\frac{38248}{262087}B_2$	$\frac{42230}{262087}B_1$ $+\frac{45141}{262087}B_2$	$\frac{44055}{262087}B_1$ $+\frac{43275}{262087}B_2$	$\frac{43637}{262087}B_1$ $+\frac{43846}{262087}B_2$	$\frac{43484}{262087}B_1$ $+\frac{43428}{262087}B_2$	$\frac{44514}{262087}B_1$ $+\frac{44529}{262087}B_2$	$\frac{40547}{262087}B_1$ $+\frac{40543}{262087}B_2$	$\frac{55385}{262087}B_1$ $+\frac{55316}{262087}B_2$	0
$n=11$	$\frac{445380}{978122}B_1$ $-\frac{119339}{978122}B_2$	$\frac{87362}{978122}B_1$ $+\frac{238678}{978122}B_2$	$\frac{183294}{978122}B_1$ $+\frac{142749}{978122}B_2$	$\frac{157584}{978122}B_1$ $+\frac{168448}{978122}B_2$	$\frac{164492}{978122}B_1$ $+\frac{161581}{978122}B_2$	$\frac{162570}{978122}B_1$ $+\frac{163350}{978122}B_2$	$\frac{163350}{978122}B_1$ $+\frac{163141}{978122}B_2$	$\frac{162152}{978122}B_1$ $+\frac{162208}{978122}B_2$	$\frac{166164}{978122}B_1$ $+\frac{166149}{978122}B_2$	$\frac{151314}{978122}B_1$ $+\frac{151318}{978122}B_2$	$\frac{206702}{978122}B_1$ $+\frac{206701}{978122}B_2$	0
$n=12$	$\frac{1662180}{3650401}B_1$ $-\frac{445380}{3650401}B_2$	$\frac{326041}{3650401}B_1$ $+\frac{890760}{3650401}B_2$	$\frac{684057}{3650401}B_1$ $+\frac{532741}{3650401}B_2$	$\frac{588132}{3650401}B_1$ $+\frac{628677}{3650401}B_2$	$\frac{613816}{3650401}B_1$ $+\frac{602952}{3650401}B_2$	$\frac{607005}{3650401}B_1$ $+\frac{609916}{3650401}B_2$	$\frac{608565}{3650401}B_1$ $+\frac{607785}{3650401}B_2$	$\frac{609136}{3650401}B_1$ $+\frac{609345}{3650401}B_2$	$\frac{605292}{3650401}B_1$ $+\frac{605236}{3650401}B_2$	$\frac{620097}{3650401}B_1$ $+\frac{620112}{3650401}B_2$	$\frac{564721}{3650401}B_1$ $+\frac{564717}{3650401}B_2$	$\frac{771420}{3650401}B_1$ $+\frac{771421}{3650401}B_2$	0

Für die erste und letzte Stützkraft A_0 und A_n erhalten wir entsprechend den zwei Lagerungsmöglichkeiten als freie Auflagerung oder starre Einspannung zwei verschiedene Ausdrücke. Zunächst folgt mit A_x'' aus (12) für $x=0$

$$A_0 = \frac{M_0 - M_1}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi ,$$

und wir erhalten weiter für

a) freie Lagerung: $M_0 = 0$, d. h. $A_0 = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi ,$

b) starre Einspannung: $2\,M_0 + M_1 = B_1 = \frac{1}{l^2}\int_0^l \xi\,(l-\xi)\,(2\,l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi ,$

d. h. $A_0 = 3\frac{M_0}{l} - \frac{B_1}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = 3\,\frac{M_0}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l (l-\xi)^3\, q(\xi)\, d\xi .$

Weiter kommt mit A_x' aus (12) für $x=n$

$$A_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l \xi\, q(\xi)\, d\xi ,$$

und wir erhalten weiter für

a) freie Lagerung: $M_n = 0$, d. h. $A_n = -\frac{M_{n-1}}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l \xi\, q(\xi)\, d\xi ,$

b) starre Einspannung: $M_{n-1} + 2\,M_n = B_2 = \frac{1}{l^2}\int_0^l \xi\,(l-\xi)\,(l+\xi)\, q(\xi)\, d\xi ,$

d. h. $A_n = 3\frac{M_n}{l} - \frac{B_2}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l \xi q(\xi)\, d\xi = 3\,\frac{M_n}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l \xi^3\, q(\xi)\, d\xi .$

Wir erhalten somit folgendes Schema, in welches die M_x dem betreffenden Lagerungsfall entsprechend einzuführen sind.

	A_0	A_x	A_n
freie Auflagerung	$-\frac{M_1}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi$	$6\,\frac{M_x}{l} + \frac{1}{l^2}\int_0^l (l^2 - 3\,l\,\xi + 3\,\xi^2)\, q(\xi)\, d\xi$	$-\frac{M_{n-1}}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l \xi\, q(\xi)\, d\xi$
starre Einspannung	$3\,\frac{M_0}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l (l-\xi)^3\, q(\xi)\, d\xi$	$6\,\frac{M_x}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l [\xi^3 + (l-\xi)^3]\, q(\xi)\, d\xi$	$3\,\frac{M_n}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l \xi^3\, q(\xi)\, d\xi$

e) Beispiel. Als Anwendungsbeispiel wählen wir einen homogenen Träger auf 7 Stützen ($n=6$) mit einer trapezförmigen Feldbelastung gemäß $q(\xi) = q_l + \frac{q_r - q_l}{l}\xi$. Eine einfache Rechnung liefert folgende Belastungsintegrale:

$$\frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{6}\,(2\,q_l + q_r)\, l , \qquad \frac{1}{l}\int_0^l \xi\, q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{6}\,(q_l + 2\,q_r)\, l ,$$

$$\frac{1}{l^3}\int_0^l (l-\xi)^3 q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{20}(4\,q_l + q_r)\, l , \qquad \frac{1}{l^3}\int_0^l \xi^3\, q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{20}\,(q_l + 4\,q_r)\, l ,$$

$$\frac{1}{l^2}\int_0^l (l^2 - 3\,l\,\xi + 3\,\xi^2)\, q(\xi)\, d\xi \equiv \frac{1}{l^3}\int_0^l \left[(l-\xi)^3 + \xi^3\right] q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{4}\,(q_l + q_r)\, l ;$$

$$B_1 = \frac{1}{l^2}\int_0^l \xi\,(l-\xi)\,(2\,l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{60}\,(8\,q_l + 7\,q_r)\, l^2 ,$$

$$B_2 = \frac{1}{l^2}\int_0^l \xi\,(l-\xi)\,(l+\xi)\, q(\xi)\, d\xi = \frac{1}{60}\,(7\,q_l + 8\,q_r)\, l^2 ,$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{1}{4}\,(q_l + q_r)\, l^2 .$$

Fall	x	0	1	2	3	4	5	6
a)	M_x	0	$\frac{11}{208}(q_l+q_r)l^2$	$\frac{8}{208}(q_l+q_r)l^2$	$\frac{9}{208}(q_l+q_r)l^2$	$\frac{8}{208}(q_l+q_r)l^2$	$\frac{11}{208}(q_l+q_r)l^2$	0
	A_x	$\frac{(175q_l+71q_r)l}{624}$	$\frac{354}{624}(q_l+q_r)l$	$\frac{300}{624}(q_l+q_r)l$	$\frac{318}{624}(q_l+q_r)l$	$\frac{300}{624}(q_l+q_r)l$	$\frac{354}{624}(q_l+q_r)l$	$\frac{(71q_l+175q_r)l}{624}$
b)	M_x	$\frac{(145q_l+115q_r)l^2}{3120}$	$\frac{(126q_l+134q_r)l^2}{3120}$	$\frac{(131q_l+129q_r)l^2}{3120}$	$\frac{130(q_l+q_r)l^2}{3120}$	$\frac{(129q_l+131q_r)l^2}{3120}$	$\frac{(134q_l+126q_r)l^2}{3120}$	$\frac{(115q_l+145q_r)l^2}{3120}$
	A_x	$\frac{(353q_l+167q_r)l}{1040}$	$\frac{(512q_l+528q_r)l}{1040}$	$\frac{(522q_l+518q_r)l}{1040}$	$\frac{1}{2}(q_l+q_r)l$	$\frac{(518q_l+522q_r)l}{1040}$	$\frac{(528q_l+512q_r)l}{1040}$	$\frac{(167q_l+353q_r)l}{1040}$
c)	M_x	$\frac{(3765q_l+2985q_r)l^2}{81060}$	$\frac{(3278q_l+3487q_r)l^2}{81060}$	$\frac{(3388q_l+3332q_r)l^2}{81060}$	$\frac{(3435q_l+3450q_r)l^2}{81060}$	$\frac{(3137q_l+3133q_r)l^2}{81060}$	$\frac{(4282q_l+4283q_r)l^2}{81060}$	0
	A_x	$\frac{(9169q_l+4336q_r)l}{27020}$	$\frac{(13311q_l+13729q_r)l}{27020}$	$\frac{(13521q_l+13419q_r)l}{27020}$	$\frac{(13625q_l+13655q_r)l}{27020}$	$\frac{(13029q_l+13021q_r)l}{27020}$	$\frac{(15319q_l+15321q_r)l}{27020}$	$\frac{(3076q_l+7579q_r)l}{27020}$

Aus den Tabellen 1 bis 3 entnehmen wir nun für $n=6$ mit den berechneten Belastungsgliedern B_1 und B_2 die Stützmomente und können damit auch die Auflagerkräfte ermitteln. In nebenstehender Tabelle sind die Ergebnisse für die drei Randauflagerungen zusammengestellt.

5. Träger gleicher Feldlängen mit einer einzigen Belastung im i-ten Feld. Nach dem Superpositionsgesetz kann eine beliebige Belastung des Trägers gleicher Feldlängen in n Unterbelastungsfälle aufgespalten werden, wobei in jedem Unterbelastungsfall nur ein einziges Feld mit seiner Feldbelastung belastet ist. Die allgemeine Belastung aller n Felder kann dann durch Überlagerung aller n Unterbelastungsfälle zusammengesetzt werden.

Bezeichnen wir mit i das einzige belastete Feld auf den Stützen $i-1$ und i, so können wir für die Stützmomente der unbelasteten Felder folgenden Ansatz nach (8) mit vier Auflösungskonstanten C_1, C_2, C_1', C_2' machen (siehe Abb. 2):

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq i-1: \quad & M_x = C_1\, a_x + C_2\, b_x\,, \\ i \leqq x \leqq n: \quad & M_x' = C_1'\, a_x + C_2'\, b_x\,. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die vier Konstanten aus (14) reichen aus, um die zwei Auflagerbedingungen an den beiden Endstützen und die zwei Übergangsbedingungen an den Stützen $i-1$ und i zu befriedigen. Wir haben auch hier wieder gemäß Abschnitt 4a) bis c) drei charakteristische Lagerungsfälle zu unterscheiden, die sich mit Hilfe der dualen Zahlen a_x und b_x leicht und übersichtlich erledigen lassen.

Zunächst befriedigen wir die für alle drei Lagerungsfälle gleichen Übergangsbedingungen durch Aufstellung der Dreimomentengleichung für die Stützen $i-1$ und i und erhalten für

$$\left.\begin{aligned} x=i-1: \quad & M_{i-2} + 4\,M_{i-1} + M_i' = B_1\,, \\ x=i: \quad & M_{i-1} + 4\,M_i' + M_{i+1}' = B_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Nun müssen aber wegen der für unbelastete Felder geltenden Dreimomentengleichung $M_{x-2}+4\,M_{x-1}+M_x=0$ mit den nicht mehr vorkommenden Stützmomenten (M_i) und (M_{i-1}') folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} & M_{i-2} + 4\,M_{i-1} + (M_i) = 0\,, \\ & (M_{i-1}') + 4\,M_i' + M_{i+1}' = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (15a)$$

Führt man (15a) in (15) ein, so kommt

$$\begin{aligned} -(M_i) + M_i' &= B_1\,, \\ M_{i-1} - (M_{i-1}') &= B_2\,, \end{aligned} \quad \text{oder mit (14)}$$

$$\left.\begin{aligned} (C_1'-C_1)\,a_i + (C_2'-C_2)\,b_i &= B_1\,, \\ -(C_1'-C_1)\,a_{i-1} - (C_2'-C_2)\,b_{i-1} &= B_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (15b)$$

Aus (15b) erhalten wir zunächst wegen $b_i a_{i-1} - b_{i-1} a_i = b_1 = 1$

$$C_1' = C_1 - (B_1 b_{i-1} + B_2 b_i),$$
$$C_2' = C_2 + (B_1 a_{i-1} + B_2 a_i)$$

und nach einfachen Zwischenrechnungen unter Beachtung von (7)

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1 a_x + C_2 b_x, \\ M_x' &= C_1 a_x + C_2 b_x + b_{x+1-i} B_1 + b_{x-i} B_2, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wobei die übrig bleibenden Konstanten C_1 und C_2 aus den Randauflagerbedingungen zu bestimmen sind.

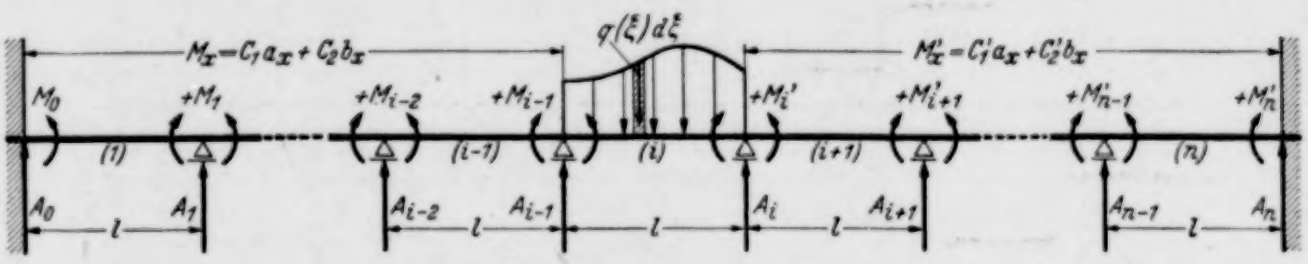


Abb. 2. Träger mit gleichen Feldlängen und einziger Feldbelastung in Feld i.

a) Freie Auflagerung beider Endstützen. Aus (16) folgt mit

$$x = 0: \quad M_0 = 0 = C_1 a_0 + C_2 b_0, \quad \text{d. h. } C_1 = 0,$$
$$x = n: \quad M_n' = 0 = C_2 b_n + b_{n+1-i} B_1 + b_{n-i} B_2,$$
$$C_2 = -\frac{1}{b_n}(b_{n+1-i} B_1 + b_{n-i} B_2).$$

Mit Benützung von (7b) und des Vorzeichengesetzes (6d) wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{b_x}{b_n}(b_{n+1-i} B_1 + b_{n-i} B_2) = (-1)^{i-1-x} |b_x| \frac{1}{|b_n|}\left(|b_{n+1-i}| B_1 - |b_{n-i}| B_2\right), \\ M_x' &= -\frac{1}{b_n}\left[(b_{n+1-i} b_x - b_n b_{x+1-i}) B_1 + (b_{n-i} b_x - b_n b_{x-i}) B_2\right] = \\ &= -\frac{b_{n-x}}{b_n}(b_{i-1} B_1 + b_i B_2) = (-1)^{x+1-i} |b_{n-x}| \frac{1}{|b_n|}\left(|b_{i-1}| B_1 - |b_i| B_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

b) Starre Einspannung beider Endstützen. Unter Benützung von (7a) folgt aus (16) mit den Randbedingungen für

$$x=0: \; 2M_0 + M_1 = 0, \; C_1(2a_0 + a_1) + C_2(2b_0 + b_1) = 0, \; \text{d. h. } C_2 = 0,$$
$$x=n: \; M'_{n-1} + 2M'_n = 0, \; C_1(a_{n-1} + 2a_n) + (b_{n-i} + 2b_{n+1-i}) B_1 + (b_{n-1-i} + 2b_{n-i}) B_2 = 0$$

oder

$$-3b_n C_1 - a_{n+1-i} B_1 - a_{n-i} B_2 = 0, \; \text{d. h. } C_1 = -\frac{1}{3b_n}(a_{n+1-i} B_1 + a_{n-i} B_2).$$

Mit Benützung von (7b) und des Vorzeichengesetzes (6d) wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{a_x}{3b_n}(a_{n+1-i} B_1 + a_{n-i} B_2) = (-1)^{i-1-x} |a_x| \frac{1}{3|b_n|}\left(|a_{n+1-i}| B_1 - |a_{n-i}| B_2\right), \\ M_x' &= -\frac{1}{3b_n}\left[(a_{n+1-i} a_x - 3b_n b_{x+1-i}) B_1 + (a_{n-i} a_x - 3b_n b_{x-i}) B_2\right] = \\ &= -\frac{a_{n-x}}{3b_n}(a_{i-1} B_1 + a_i B_2) = (-1)^{x+1-i} |a_{n-x}| \frac{1}{3|b_n|}\left(|a_{i-1}| B_1 - |a_i| B_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

c) Starre Einspannung der ersten und freie Auflagerung der letzten Stütze. Da für die erste Stütze dieselbe Randbedingung wie im vorigen Fall b) zu erfüllen ist, übernehmen wir wieder das dortige Ergebnis mit $C_2 = 0$ und erhalten weiter aus der Randbedingung für die letzte Stütze

$$x = n: \; M_n' = 0 = C_1 a_n + b_{n+1-i} B_1 + b_{n-i} B_2, \; C_1 = -\frac{1}{a_n}(b_{n+1-i} B_1 + b_{n-i} B_2).$$

4. Tabelle der Stützmomente für freie Auflagerung beider Endstützen, geordnet in der Reihenfolge der belasteten Felder.

$$M_x = (-1)^{i-1-x}\,|b_x|\,\frac{1}{|b_n|}\left(|b_{n+1-i}|\,B_1 - |b_{n-i}|\,B_2\right)$$
$$M'_x = (-1)^{x+1-i}\,|b_{n-x}|\,\frac{1}{|b_n|}\left(|b_{i-1}|\,B_1 - |b_i|\,B_2\right)$$

$n=2$	M_0	M_1	M_2	$L_{2,i}=\frac{1}{4}(\lvert b_{3-i}\rvert B_1-\lvert b_{2-i}\rvert B_2)$	$R_{2,i}=\frac{1}{4}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-1R_{2,1}$	0	———	$R_{2,1}=-\frac{1}{4}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{2,2}$	0	$L_{2,2}=\frac{1}{4}B_1$	———

$n=3$	M_0	M_1	M_2	M_3	$L_{3,i}=\frac{1}{15}(\lvert b_{4-i}\rvert B_1-\lvert b_{3-i}\rvert B_2)$	$R_{3,i}=\frac{1}{15}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-4R_{3,1}$	$+1R_{3,1}$	0	———	$R_{3,1}=-\frac{1}{15}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{3,2}$	$-1R_{3,2}$	0	$L_{3,2}=\frac{1}{15}(4B_1-B_2)$	$R_{3,2}=\frac{1}{15}(B_1-4B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{3,3}$	$+4L_{3,3}$	0	$L_{3,3}=\frac{1}{15}B_1$	———

$n=4$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	$L_{4,i}=\frac{1}{56}(\lvert b_{5-i}\rvert B_1-\lvert b_{4-i}\rvert B_2)$	$R_{4,i}=\frac{1}{56}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-15R_{4,1}$	$+4R_{4,1}$	$-1R_{4,1}$	0	———	$R_{4,1}=-\frac{1}{56}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{4,2}$	$-4R_{4,2}$	$+1R_{4,2}$	0	$L_{4,2}=\frac{1}{56}(15B_1-4B_2)$	$R_{4,2}=\frac{1}{56}(B_1-4B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{4,3}$	$+4L_{4,3}$	$-1R_{4,3}$	0	$L_{4,3}=\frac{1}{56}(4B_1-B_2)$	$R_{4,3}=\frac{1}{56}(4B_1-15B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{4,4}$	$-4L_{4,4}$	$+15L_{4,4}$	0	$L_{4,4}=\frac{1}{56}B_1$	———

$n=5$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	$L_{5,i}=\frac{1}{209}(\lvert b_{6-i}\rvert B_1-\lvert b_{5-i}\rvert B_2)$	$R_{5,i}=\frac{1}{209}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-56R_{5,1}$	$+15R_{5,1}$	$-4R_{5,1}$	$+1R_{5,1}$	0	———	$R_{5,1}=-\frac{1}{209}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{5,2}$	$-15R_{5,2}$	$+4R_{5,2}$	$-1R_{5,2}$	0	$L_{5,2}=\frac{1}{209}(56B_1-15B_2)$	$R_{5,2}=\frac{1}{209}(B_1-4B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{5,3}$	$+4L_{5,3}$	$-4R_{5,3}$	$+1R_{5,3}$	0	$L_{5,3}=\frac{1}{209}(15B_1-4B_2)$	$R_{5,3}=\frac{1}{209}(4B_1-15B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{5,4}$	$-4L_{5,4}$	$+15L_{5,4}$	$-1R_{5,4}$	0	$L_{5,4}=\frac{1}{209}(4B_1-B_2)$	$R_{5,4}=\frac{1}{209}(15B_1-56B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{5,5}$	$+4L_{5,5}$	$-15L_{5,5}$	$+56L_{5,5}$	0	$L_{5,5}=\frac{1}{209}B_1$	———

$n=6$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	$L_{6,i}=\frac{1}{780}(\lvert b_{7-i}\rvert B_1-\lvert b_{6-i}\rvert B_2)$	$R_{6,i}=\frac{1}{780}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-209R_{6,1}$	$+56R_{6,1}$	$-15R_{6,1}$	$+4R_{6,1}$	$-1R_{6,1}$	0	———	$R_{6,1}=-\frac{1}{780}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{6,2}$	$-56R_{6,2}$	$+15R_{6,2}$	$-4R_{6,2}$	$+1R_{6,2}$	0	$L_{6,2}=\frac{1}{780}(209B_1-56B_2)$	$R_{6,2}=\frac{1}{780}(B_1-4B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{6,3}$	$+4L_{6,3}$	$-15R_{6,3}$	$+4R_{6,3}$	$-1R_{6,3}$	0	$L_{6,3}=\frac{1}{780}(56B_1-15B_2)$	$R_{6,3}=\frac{1}{780}(4B_1-15B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{6,4}$	$-4L_{6,4}$	$+15L_{6,4}$	$-4R_{6,4}$	$+1R_{6,4}$	0	$L_{6,4}=\frac{1}{780}(15B_1-4B_2)$	$R_{6,4}=\frac{1}{780}(15B_1-56B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{6,5}$	$+4L_{6,5}$	$-15L_{6,5}$	$+56L_{6,5}$	$-1R_{6,5}$	0	$L_{6,5}=\frac{1}{780}(4B_1-B_2)$	$R_{6,5}=\frac{1}{780}(56B_1-209B_2)$
$i=6$	0	$+1L_{6,6}$	$-4L_{6,6}$	$+15L_{6,6}$	$-56L_{6,6}$	$+209L_{6,6}$	0	$L_{6,6}=\frac{1}{780}B_1$	———

$n=7$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	$L_{7,i}=\frac{1}{2911}(\lvert b_{8-i}\rvert B_1-\lvert b_{7-i}\rvert B_2)$	$R_{7,i}=\frac{1}{2911}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-780R_{7,1}$	$+209R_{7,1}$	$-56R_{7,1}$	$+15R_{7,1}$	$-4R_{7,1}$	$+1R_{7,1}$	0	———	$R_{7,1}=-\frac{1}{2911}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{7,2}$	$-209R_{7,2}$	$+56R_{7,2}$	$-15R_{7,2}$	$+4R_{7,2}$	$-1R_{7,2}$	0	$L_{7,2}=\frac{1}{2911}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{7,2}=\frac{1}{2911}(B_1-4\,B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{7,3}$	$+4L_{7,3}$	$-56R_{7,3}$	$+15R_{7,3}$	$-4R_{7,3}$	$+1R_{7,3}$	0	$L_{7,3}=\frac{1}{2911}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{7,3}=\frac{1}{2911}(4\,B_1-15\,B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{7,4}$	$-4L_{7,4}$	$+15L_{7,4}$	$-15R_{7,4}$	$+4R_{7,4}$	$-1R_{7,4}$	0	$L_{7,4}=\frac{1}{2911}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{7,4}=\frac{1}{2911}(15\,B_1-56\,B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{7,5}$	$+4L_{7,5}$	$-15L_{7,5}$	$+56L_{7,5}$	$-4R_{7,5}$	$+1R_{7,5}$	0	$L_{7,5}=\frac{1}{2\ 11}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{7,5}=\frac{1}{2911}(56\,B_1-209\,B_2)$
$i=6$	0	$+1L_{7,6}$	$-4L_{7,6}$	$+15L_{7,6}$	$-56L_{7,6}$	$+209L_{7,6}$	$-1R_{7,6}$	0	$L_{7,6}=\frac{1}{2911}(4\,B_1-B_2)$	$R_{7,6}=\frac{1}{2911}(209\,B_1-780\,B_2)$
$i=7$	0	$-1L_{7,7}$	$+4L_{7,7}$	$-15L_{7,7}$	$+56L_{7,7}$	$-209L_{7,7}$	$+780L_{7,7}$	0	$L_{7,7}=\frac{1}{2911}B_1$	———

$n=8$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$L_{8,i}=\frac{1}{10864}(\lvert b_{9-i}\rvert B_1-\lvert b_{8-i}\rvert B_2)$	$R_{8,i}=\frac{1}{10864}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-2911R_{8,1}$	$+780R_{8,1}$	$-209R_{8,1}$	$+56R_{8,1}$	$-15R_{8,1}$	$+4R_{8,1}$	$-1R_{8,1}$	0	———	$R_{8,1}=-\frac{1}{10864}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{8,2}$	$-780R_{8,2}$	$+209R_{8,2}$	$-56R_{8,2}$	$+15R_{8,2}$	$-4R_{8,2}$	$+1R_{8,2}$	0	$L_{8,2}=\frac{1}{10864}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{8,2}=\frac{1}{10864}(B_1-4\,B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{8,3}$	$+4L_{8,3}$	$-209R_{8,3}$	$+56R_{8,3}$	$-15R_{8,3}$	$+4R_{8,3}$	$-1R_{8,3}$	0	$L_{8,3}=\frac{1}{10864}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{8,3}=\frac{1}{10864}(4\,B_1-15\,B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{8,4}$	$-4L_{8,4}$	$+15L_{8,4}$	$-56R_{8,4}$	$+15R_{8,4}$	$-4R_{8,4}$	$+1R_{8,4}$	0	$L_{8,4}=\frac{1}{10864}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{8,4}=\frac{1}{10864}(15\,B_1-56\,B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{8,5}$	$+4L_{8,5}$	$-15L_{8,5}$	$+56L_{8,5}$	$-15R_{8,5}$	$+4R_{8,5}$	$-1R_{8,5}$	0	$L_{8,5}=\frac{1}{10864}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{8,5}=\frac{1}{10864}(56\,B_1-209\,B_2)$
$i=6$	0	$+1L_{8,6}$	$-4L_{8,6}$	$+15L_{8,6}$	$-56L_{8,6}$	$+209L_{8,6}$	$-4R_{8,6}$	$+1R_{8,6}$	0	$L_{8,6}=\frac{1}{10864}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{8,6}=\frac{1}{10864}(209\,B_1-780\,B_2)$
$i=7$	0	$-1L_{8,7}$	$+4L_{8,7}$	$-15L_{8,7}$	$+56L_{8,7}$	$-209L_{8,7}$	$+780L_{8,7}$	$-1R_{8,7}$	0	$L_{8,7}=\frac{1}{10864}(4\,B_1-B_2)$	$R_{8,7}=\frac{1}{10864}(780\,B_1-2911\,B_2)$
$i=8$	0	$+1L_{8,8}$	$-4L_{8,8}$	$+15L_{8,8}$	$-56L_{8,8}$	$+209L_{8,8}$	$-780L_{8,8}$	$+2911L_{8,8}$	0	$L_{8,8}=\frac{1}{10864}B_1$	———

$n=9$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	$L_{9,i}=\frac{1}{40545}(\lvert b_{10-i}\rvert B_1-\lvert b_{9-i}\rvert B_2)$	$R_{9,i}=\frac{1}{40545}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-10864\ R_{9,1}$	$+2911\ R_{9,1}$	$-780R_{9,1}$	$+209R_{9,1}$	$-56R_{9,1}$	$+15R_{9,1}$	$-4R_{9,1}$	$+1R_{9,1}$	0	———	$R_{9,1}=-\frac{1}{40545}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{9,2}$	$-2911\ R_{9,2}$	$+780R_{9,2}$	$-209R_{9,2}$	$+56R_{9,2}$	$-15R_{9,2}$	$+4R_{9,2}$	$-1R_{9,2}$	0	$L_{9,2}=\frac{1}{40545}(10864\,B_1-2911\,B_2)$	$R_{9,2}=\frac{1}{40545}(B_1-4\,B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{9,3}$	$+4L_{9,3}$	$-780R_{9,3}$	$+209R_{9,3}$	$-56R_{9,3}$	$+15R_{9,3}$	$-4R_{9,3}$	$+1R_{9,3}$	0	$L_{9,3}=\frac{1}{40545}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{9,3}=\frac{1}{40545}(4\,B_1-15\,B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{9,4}$	$-4L_{9,4}$	$+15L_{9,4}$	$-209R_{9,4}$	$+56R_{9,4}$	$-15R_{9,4}$	$+4R_{9,4}$	$-1R_{9,4}$	0	$L_{9,4}=\frac{1}{40545}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{9,4}=\frac{1}{40545}(15\,B_1-56\,B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{9,5}$	$+4L_{9,5}$	$-15L_{9,5}$	$+56L_{9,5}$	$-56R_{9,5}$	$+15R_{9,5}$	$-4R_{9,5}$	$+1R_{9,5}$	0	$L_{9,5}=\frac{1}{40545}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{9,5}=\frac{1}{40545}(56\,B_1-209\,B_2)$
$i=6$	0	$+1L_{9,6}$	$-4L_{9,6}$	$+15L_{9,6}$	$-56L_{9,6}$	$+209L_{9,6}$	$-15R_{9,6}$	$+4R_{9,6}$	$-1R_{9,6}$	0	$L_{9,6}=\frac{1}{40545}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{9,6}=\frac{1}{40545}(209\,B_1-780\,B_2)$
$i=7$	0	$-1L_{9,7}$	$+4L_{9,7}$	$-15L_{9,7}$	$+56L_{9,7}$	$-209L_{9,7}$	$+780L_{9,7}$	$-4R_{9,7}$	$+1R_{9,7}$	0	$L_{9,7}=\frac{1}{40545}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{9,7}=\frac{1}{40545}(780\,B_1-2911\,B_2)$
$i=8$	0	$+1L_{9,8}$	$-4L_{9,8}$	$+15L_{9,8}$	$-56L_{9,8}$	$+209L_{9,8}$	$-780L_{9,8}$	$+2911\ L_{9,8}$	$-1R_{9,8}$	0	$L_{9,8}=\frac{1}{40545}(4\,B_1-B_2)$	$R_{9,8}=\frac{1}{40545}(2911\,B_1-10864\,B_2)$
$i=9$	0	$-1L_{9,9}$	$+4L_{9,9}$	$-15L_{9,9}$	$+56L_{9,9}$	$-209L_{9,9}$	$+780L_{9,9}$	$-2911\ L_{9,9}$	$+10864\ L_{9,9}$	0	$L_{9,9}=\frac{1}{40545}B_1$	———

$n=10$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	$L_{10,i}=\frac{1}{151316}(\lvert b_{11-i}\rvert B_1-\lvert b_{10-i}\rvert B_2)$	$R_{10,i}=\frac{1}{151315}(\lvert b_{i-1}\rvert B_1-\lvert b_i\rvert B_2)$
$i=1$	0	$-40545\ R_{10,1}$	$+10864\ R_{10,1}$	$-2911\ R_{10,1}$	$+780R_{10,1}$	$-209R_{10,1}$	$+56R_{10,1}$	$-15R_{10,1}$	$+4R_{10,1}$	$-1R_{10,1}$	0	———	$R_{10,1}=-\frac{1}{151316}B_2$
$i=2$	0	$+1L_{10,2}$	$-10864\ R_{10,2}$	$+2911\ R_{10,2}$	$-780R_{10,2}$	$+209R_{10,2}$	$-56R_{10,2}$	$+15R_{10,2}$	$-4R_{10,2}$	$+1R_{10,2}$	0	$L_{10,2}=\frac{1}{151316}(40545B_1-10864B_2)$	$R_{10,2}=\frac{1}{151316}(B_1-4\,B_2)$
$i=3$	0	$-1L_{10,3}$	$+4L_{10,3}$	$-2911\ R_{10,3}$	$+780R_{10,3}$	$-209R_{10,3}$	$+56R_{10,3}$	$-15R_{10,3}$	$+4R_{10,3}$	$-1R_{10,3}$	0	$L_{10,3}=\frac{1}{151316}(10864B_1-2911B_2)$	$R_{10,3}=\frac{1}{151316}(4\,B_1-15\,B_2)$
$i=4$	0	$+1L_{10,4}$	$-4L_{10,4}$	$+15L_{10,4}$	$-780R_{10,4}$	$+209R_{10,4}$	$-56R_{10,4}$	$+15R_{10,4}$	$-4R_{10,4}$	$+1R_{10,4}$	0	$L_{10,4}=\frac{1}{151316}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{10,4}=\frac{1}{151316}(15\,B_1-56\,B_2)$
$i=5$	0	$-1L_{10,5}$	$+4L_{10,5}$	$-15L_{10,5}$	$+56L_{10,5}$	$-209R_{10,5}$	$+56R_{10,5}$	$-15R_{10,5}$	$+4R_{10,5}$	$-1R_{10,5}$	0	$L_{10,5}=\frac{1}{151316}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{10,5}=\frac{1}{151316}(56\,B_1-209\,B_2)$
$i=6$	0	$+1L_{10,6}$	$-4L_{10,6}$	$+15L_{10,6}$	$-56L_{10,6}$	$+209L_{10,6}$	$-56R_{10,6}$	$+15R_{10,6}$	$-4R_{10,6}$	$+1R_{10,6}$	0	$L_{10,6}=\frac{1}{151316}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{10,6}=\frac{1}{151316}(209\,B_1-780\,B_2)$
$i=7$	0	$-1L_{10,7}$	$+4L_{10,7}$	$-15L_{10,7}$	$+56L_{10,7}$	$-209L_{10,7}$	$+780L_{10,7}$	$-15R_{10,7}$	$+4R_{10,7}$	$-1R_{10,7}$	0	$L_{10,7}=\frac{1}{151316}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{10,7}=\frac{1}{151316}(780\,B_1-2911\,B_2)$
$i=8$	0	$+1L_{10,8}$	$-4L_{10,8}$	$+15L_{10,8}$	$-56L_{10,8}$	$+209L_{10,8}$	$-780L_{10,8}$	$+2911\ L_{10,8}$	$-4R_{10,8}$	$+1R_{10,8}$	0	$L_{10,8}=\frac{1}{151316}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{10,8}=\frac{1}{151316}(2911\,B_1-10864\,B_2)$
$i=9$	0	$-1L_{10,9}$	$+4L_{10,9}$	$-15L_{10,9}$	$+56L_{10,9}$	$-209L_{10,9}$	$+780L_{10,9}$	$-2911\ L_{10,9}$	$+10864\ L_{10,9}$	$-1R_{10,9}$	0	$L_{10,9}=\frac{1}{151316}(4\,B_1-B_2)$	$R_{10,9}=\frac{1}{151316}(10864B_1-40545B_2)$
$i=10$	0	$+1L_{10,10}$	$-4L_{10,10}$	$+15L_{10,10}$	$-56L_{10,10}$	$+209\ L_{10,10}$	$-780\ L_{10,10}$	$+2911\ L_{10,10}$	$-10864\ L_{10,10}$	$+40545\ L_{10,10}$	0	$L_{10,10}=\frac{1}{151316}B_1$	———

5. Tabelle der Stützmomente für starre Einspannung beider Endstützen, geordnet in der Reihenfolge der belasteten Felder.

$$M_x = (-1)^{i-1-x}\,|a_x|\,\frac{1}{3\,|b_n|}\left(|a_{n+1-i}|\,B_1 - |a_{n-i}|\,B_2\right)$$

$$M'_x = (-1)^{x+1-i}\,|a_{n-x}|\,\frac{1}{3\,|b_n|}\left(|a_{i-1}|\,B_1 - |a_i|\,B_2\right)$$

$n=2$	M_0	M_1	M_2	$L_{2,i}=\frac{1}{12}(\lvert a_{3-i}\rvert B_1-\lvert a_{2-i}\rvert B_2)$	$R_{2,i}=\frac{1}{12}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{2,1}$	$-2R_{2,1}$	$+1R_{2,1}$	$L_{2,1}=\frac{1}{12}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{2,1}=\frac{1}{12}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{2,2}$	$+2L_{2,2}$	$-1R_{2,2}$	$L_{2,2}=\frac{1}{12}(2\,B_1-B_2)$	$R_{2,2}=\frac{1}{12}(2\,B_1-7\,B_2)$

$n=3$	M_0	M_1	M_2	M_3	$L_{3,i}=\frac{1}{45}(\lvert a_{4-i}\rvert B_1-\lvert a_{3-i}\rvert B_2)$	$R_{3,i}=\frac{1}{45}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{3,1}$	$-7R_{3,1}$	$+2R_{3,1}$	$-1R_{3,1}$	$L_{3,1}=\frac{1}{45}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{3,1}=\frac{1}{45}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{3,2}$	$+2L_{3,2}$	$-2R_{3,2}$	$+1R_{3,2}$	$L_{3,2}=\frac{1}{45}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{3,2}=\frac{1}{45}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{3,3}$	$-2L_{3,3}$	$+7L_{3,3}$	$-1R_{3,3}$	$L_{3,3}=\frac{1}{45}(2\,B_1-B_2)$	$R_{3,3}=\frac{1}{45}(7\,B_1-26\,B_2)$

$n=4$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	$L_{4,i}=\frac{1}{168}(\lvert a_{5-i}\rvert B_1-\lvert a_{4-i}\rvert B_2)$	$R_{4,i}=\frac{1}{168}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{4,1}$	$-26R_{4,1}$	$+7R_{4,1}$	$-2R_{4,1}$	$+1R_{4,1}$	$L_{4,1}=\frac{1}{168}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{4,1}=\frac{1}{168}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{4,2}$	$+2L_{4,2}$	$-7R_{4,2}$	$+2R_{4,2}$	$-1R_{4,2}$	$L_{4,2}=\frac{1}{168}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{4,2}=\frac{1}{168}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{4,3}$	$-2L_{4,3}$	$+7L_{4,3}$	$-2R_{4,3}$	$+1R_{4,3}$	$L_{4,3}=\frac{1}{168}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{4,3}=\frac{1}{168}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{4,4}$	$+2L_{4,4}$	$-7L_{4,4}$	$+26L_{4,4}$	$-1R_{4,4}$	$L_{4,4}=\frac{1}{168}(2\,B_1-B_2)$	$R_{4,4}=\frac{1}{168}(26\,B_1-97\,B_2)$

$n=5$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	$L_{5,i}=\frac{1}{627}(\lvert a_{6-i}\rvert B_1-\lvert a_{5-i}\rvert B_2)$	$R_{5,i}=\frac{1}{627}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{5,1}$	$-97R_{5,1}$	$+26R_{5,1}$	$-7R_{5,1}$	$+2R_{5,1}$	$-1R_{5,1}$	$L_{5,1}=\frac{1}{627}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{5,1}=\frac{1}{627}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{5,2}$	$+2L_{5,2}$	$-26R_{5,2}$	$+7R_{5,2}$	$-2R_{5,2}$	$+1R_{5,2}$	$L_{5,2}=\frac{1}{627}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{5,2}=\frac{1}{627}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{5,3}$	$-2L_{5,3}$	$+7L_{5,3}$	$-7R_{5,3}$	$+2R_{5,3}$	$-1R_{5,3}$	$L_{5,3}=\frac{1}{627}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{5,3}=\frac{1}{627}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{5,4}$	$+2L_{5,4}$	$-7L_{5,4}$	$+26L_{5,4}$	$-2R_{5,4}$	$+1R_{5,4}$	$L_{5,4}=\frac{1}{627}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{5,4}=\frac{1}{627}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{5,5}$	$-2L_{5,5}$	$+7L_{5,5}$	$-26L_{5,5}$	$+97L_{5,5}$	$-1R_{5,5}$	$L_{5,5}=\frac{1}{627}(2\,B_1-B_2)$	$R_{5,5}=\frac{1}{627}(97\,B_1-362\,B_2)$

$n=6$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	$L_{6,i}=\frac{1}{2340}(\lvert a_{7-i}\rvert B_1-\lvert a_{6-i}\rvert B_2)$	$R_{6,i}=\frac{1}{2340}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{6,1}$	$-362R_{6,1}$	$+97R_{6,1}$	$-26R_{6,1}$	$+7R_{6,1}$	$-2R_{6,1}$	$+1R_{6,1}$	$L_{6,1}=\frac{1}{2340}(1351\,B_1-362\,B_2)$	$R_{6,1}=\frac{1}{2340}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{6,2}$	$+2L_{6,2}$	$-97R_{6,2}$	$+26R_{6,2}$	$-7R_{6,2}$	$+2R_{6,2}$	$-1R_{6,2}$	$L_{6,2}=\frac{1}{2340}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{6,2}=\frac{1}{2340}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{6,3}$	$-2L_{6,3}$	$+7L_{6,3}$	$-26R_{6,3}$	$+7R_{6,3}$	$-2R_{6,3}$	$+1R_{6,3}$	$L_{6,3}=\frac{1}{2340}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{6,3}=\frac{1}{2340}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{6,4}$	$+2L_{6,4}$	$-7L_{6,4}$	$+26L_{6,4}$	$-7R_{6,4}$	$+2R_{6,4}$	$-1R_{6,4}$	$L_{6,4}=\frac{1}{2340}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{6,4}=\frac{1}{2340}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{6,5}$	$-2L_{6,5}$	$+7L_{6,5}$	$-26L_{6,5}$	$+97L_{6,5}$	$-2R_{6,5}$	$+1R_{6,5}$	$L_{6,5}=\frac{1}{2340}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{6,5}=\frac{1}{2340}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{6,6}$	$+2L_{6,6}$	$-7L_{6,6}$	$+26L_{6,6}$	$-97L_{6,6}$	$+362L_{6,6}$	$-1R_{6,6}$	$L_{6,6}=\frac{1}{2340}(2\,B_1-B_2)$	$R_{6,6}=\frac{1}{2340}(362\,B_1-1351\,B_2)$

$n=7$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	$L_{7,i}=\frac{1}{8733}(\lvert a_{8-i}\rvert B_1-\lvert a_{7-i}\rvert B_2)$	$R_{7,i}=\frac{1}{8733}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{7,1}$	$-1351R_{7,1}$	$+362R_{7,1}$	$-97R_{7,1}$	$+26R_{7,1}$	$-7R_{7,1}$	$+2R_{7,1}$	$-1R_{7,1}$	$L_{7,1}=\frac{1}{8733}(5042\,B_1-1351\,B_2)$	$R_{7,1}=\frac{1}{8733}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{7,2}$	$+2L_{7,2}$	$-362R_{7,2}$	$+97R_{7,2}$	$-26R_{7,2}$	$+7R_{7,2}$	$-2R_{7,2}$	$+1R_{7,2}$	$L_{7,2}=\frac{1}{8733}(1351\,B_1-362\,B_2)$	$R_{7,2}=\frac{1}{8733}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{7,3}$	$-2L_{7,3}$	$+7L_{7,3}$	$-97R_{7,3}$	$+26R_{7,3}$	$-7R_{7,3}$	$+2R_{7,3}$	$-1R_{7,3}$	$L_{7,3}=\frac{1}{8733}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{7,3}=\frac{1}{8733}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{7,4}$	$+2L_{7,4}$	$-7L_{7,4}$	$+26L_{7,4}$	$-26R_{7,4}$	$+7R_{7,4}$	$-2R_{7,4}$	$+1R_{7,4}$	$L_{7,4}=\frac{1}{8733}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{7,4}=\frac{1}{8733}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{7,5}$	$-2L_{7,5}$	$+7L_{7,5}$	$-26L_{7,5}$	$+97L_{7,5}$	$-7R_{7,5}$	$+2R_{7,5}$	$-1R_{7,5}$	$L_{7,5}=\frac{1}{8733}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{7,5}=\frac{1}{8733}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{7,6}$	$+2L_{7,6}$	$-7L_{7,6}$	$+26L_{7,6}$	$-97L_{7,6}$	$+362L_{7,6}$	$-2R_{7,6}$	$+1R_{7,6}$	$L_{7,6}=\frac{1}{8733}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{7,6}=\frac{1}{8733}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{7,7}$	$-2L_{7,7}$	$+7L_{7,7}$	$-26L_{7,7}$	$+97L_{7,7}$	$-362L_{7,7}$	$+1351L_{7,7}$	$-1R_{7,7}$	$L_{7,7}=\frac{1}{8733}(2\,B_1-B_2)$	$R_{7,7}=\frac{1}{8733}(1351\,B_1-5042\,B_2)$

$n=8$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$L_{8,i}=\frac{1}{32592}(\lvert a_{9-i}\rvert B_1-\lvert a_{8-i}\rvert B_2)$	$R_{8,i}=\frac{1}{32592}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{8,1}$	$-5042R_{8,1}$	$+1351R_{8,1}$	$-362R_{8,1}$	$+97R_{8,1}$	$-26R_{8,1}$	$+7R_{8,1}$	$-2R_{8,1}$	$+1R_{8,1}$	$L_{8,1}=\frac{1}{32592}(18817\,B_1-5042\,B_2)$	$R_{8,1}=\frac{1}{32592}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{8,2}$	$+2L_{8,2}$	$-1351R_{8,2}$	$+362R_{8,2}$	$-97R_{8,2}$	$+26R_{8,2}$	$-7R_{8,2}$	$+2R_{8,2}$	$-1R_{8,2}$	$L_{8,2}=\frac{1}{32592}(5042\,B_1-1351\,B_2)$	$R_{8,2}=\frac{1}{32592}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{8,3}$	$-2L_{8,3}$	$+7L_{8,3}$	$-362R_{8,3}$	$+97R_{8,3}$	$-26R_{8,3}$	$+7R_{8,3}$	$-2R_{8,3}$	$+1R_{8,3}$	$L_{8,3}=\frac{1}{32592}(1351\,B_1-362\,B_2)$	$R_{8,3}=\frac{1}{32592}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{8,4}$	$+2L_{8,4}$	$-7L_{8,4}$	$+26L_{8,4}$	$-97R_{8,4}$	$+26R_{8,4}$	$-7R_{8,4}$	$+2R_{8,4}$	$-1R_{8,4}$	$L_{8,4}=\frac{1}{32592}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{8,4}=\frac{1}{32592}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{8,5}$	$-2L_{8,5}$	$+7L_{8,5}$	$-26L_{8,5}$	$+97L_{8,5}$	$-26R_{8,5}$	$+7R_{8,5}$	$-2R_{8,5}$	$+1R_{8,5}$	$L_{8,5}=\frac{1}{32592}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{8,5}=\frac{1}{32592}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{8,6}$	$+2L_{8,6}$	$-7L_{8,6}$	$+26L_{8,6}$	$-97L_{8,6}$	$+362L_{8,6}$	$-7R_{8,6}$	$+2R_{8,6}$	$-1R_{8,6}$	$L_{8,6}=\frac{1}{32592}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{8,6}=\frac{1}{32592}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{8,7}$	$-2L_{8,7}$	$+7L_{8,7}$	$-26L_{8,7}$	$+97L_{8,7}$	$-362L_{8,7}$	$+1351L_{8,7}$	$-2R_{8,7}$	$+1R_{8,7}$	$L_{8,7}=\frac{1}{32592}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{8,7}=\frac{1}{32592}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{8,8}$	$+2L_{8,8}$	$-7L_{8,8}$	$+26L_{8,8}$	$-97L_{8,8}$	$+362L_{8,8}$	$-1351L_{8,8}$	$+5042L_{8,8}$	$-1R_{8,8}$	$L_{8,8}=\frac{1}{32592}(2\,B_1-B_2)$	$R_{8,8}=\frac{1}{32592}(5042\,B_1-18817\,B_2)$

$n=9$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	$L_{9,i}=\frac{1}{121635}(\lvert a_{10-i}\rvert B_1-\lvert a_{9-i}\rvert B_2)$	$R_{9,i}=\frac{1}{121635}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{9,1}$	$-18817\ R_{9,1}$	$+5042\ R_{9,1}$	$-1351\ R_{9,1}$	$+362R_{9,1}$	$-97R_{9,1}$	$+26R_{9,1}$	$-7R_{9,1}$	$+2R_{9,1}$	$-1R_{9,1}$	$L_{9,1}=\frac{1}{121635}(70226\,B_1-18817\,B_2)$	$R_{9,1}=\frac{1}{121635}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{9,2}$	$+2L_{9,2}$	$-5042\ R_{9,2}$	$+1351\ R_{9,2}$	$-362R_{9,2}$	$+97R_{9,2}$	$-26R_{9,2}$	$+7R_{9,2}$	$-2R_{9,2}$	$+1R_{9,2}$	$L_{9,2}=\frac{1}{121635}(18817\,B_1-5042\,B_2)$	$R_{9,2}=\frac{1}{121635}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{9,3}$	$-2L_{9,3}$	$+7L_{9,3}$	$-1351\ R_{9,3}$	$+362R_{9,3}$	$-97R_{9,3}$	$+26R_{9,3}$	$-7R_{9,3}$	$+2R_{9,3}$	$-1R_{9,3}$	$L_{9,3}=\frac{1}{121635}(5042\,B_1-1351\,B_2)$	$R_{9,3}=\frac{1}{121635}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{9,4}$	$+2L_{9,4}$	$-7L_{9,4}$	$+26L_{9,4}$	$-362R_{9,4}$	$+97R_{9,4}$	$-26R_{9,4}$	$+7R_{9,4}$	$-2R_{9,4}$	$+1R_{9,4}$	$L_{9,4}=\frac{1}{121635}(1351\,B_1-362\,B_2)$	$R_{9,4}=\frac{1}{121635}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{9,5}$	$-2L_{9,5}$	$+7L_{9,5}$	$-26L_{9,5}$	$+97L_{9,5}$	$-97R_{9,5}$	$+26R_{9,5}$	$-7R_{9,5}$	$+2R_{9,5}$	$-1R_{9,5}$	$L_{9,5}=\frac{1}{121635}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{9,5}=\frac{1}{121635}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{9,6}$	$+2L_{9,6}$	$-7L_{9,6}$	$+26L_{9,6}$	$-97L_{9,6}$	$+362L_{9,6}$	$-26R_{9,6}$	$+7R_{9,6}$	$-2R_{9,6}$	$+1R_{9,6}$	$L_{9,6}=\frac{1}{121635}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{9,6}=\frac{1}{121635}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{9,7}$	$-2L_{9,7}$	$+7L_{9,7}$	$-26L_{9,7}$	$+97L_{9,7}$	$-362L_{9,7}$	$+1351\ L_{9,7}$	$-7R_{9,7}$	$+2R_{9,7}$	$-1R_{9,7}$	$L_{9,7}=\frac{1}{121635}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{9,7}=\frac{1}{121635}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{9,8}$	$+2L_{9,8}$	$-7L_{9,8}$	$+26L_{9,8}$	$-97L_{9,8}$	$+362L_{9,8}$	$-1351\ L_{9,8}$	$+5042\ L_{9,8}$	$-2R_{9,8}$	$+1R_{9,8}$	$L_{9,8}=\frac{1}{121635}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{9,8}=\frac{1}{121635}(5042\,B_1-18817\,B_2)$
$i=9$	$+1L_{9,9}$	$-2L_{9,9}$	$+7L_{9,9}$	$-26L_{9,9}$	$+97L_{9,9}$	$-362L_{9,9}$	$+1351\ L_{9,9}$	$-5042\ L_{9,9}$	$+18817\ L_{9,9}$	$-1R_{9,9}$	$L_{9,9}=\frac{1}{121635}(2\,B_1-B_2)$	$R_{9,9}=\frac{1}{121635}(18817\,B_1-70226\,B_2)$

$n=10$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	$L_{10,i}=\frac{1}{453948}(\lvert a_{11-i}\rvert B_1-\lvert a_{10-i}\rvert B_2)$	$R_{10,i}=\frac{1}{453948}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{10,1}$	$-70226\ R_{10,1}$	$+18817\ R_{10,1}$	$-5042\ R_{10,1}$	$+1351\ R_{10,1}$	$-362R_{10,1}$	$+97R_{10,1}$	$-26R_{10,1}$	$+7R_{10,1}$	$-2R_{10,1}$	$+1R_{10,1}$	$L_{10,1}=\frac{1}{453948}(262087\,B_1-70226\,B_2)$	$R_{10,1}=\frac{1}{453948}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{10,2}$	$+2L_{10,2}$	$-18817\ R_{10,2}$	$+5042\ R_{10,2}$	$-1351\ R_{10,2}$	$+362R_{10,2}$	$-97R_{10,2}$	$+26R_{10,2}$	$-7R_{10,2}$	$+2R_{10,2}$	$-1R_{10,2}$	$L_{10,2}=\frac{1}{453948}(70226\,B_1-18817\,B_2)$	$R_{10,2}=\frac{1}{453948}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{10,3}$	$-2L_{10,3}$	$+7L_{10,3}$	$-5042\ R_{10,3}$	$+1351\ R_{10,3}$	$-362R_{10,3}$	$+97R_{10,3}$	$-26R_{10,3}$	$+7R_{10,3}$	$-2R_{10,3}$	$+1R_{10,3}$	$L_{10,3}=\frac{1}{453948}(18817\,B_1-5042\,B_2)$	$R_{10,3}=\frac{1}{453948}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{10,4}$	$+2L_{10,4}$	$-7L_{10,4}$	$+26L_{10,4}$	$-1351\ R_{10,4}$	$+362R_{10,4}$	$-97R_{10,4}$	$+26R_{10,4}$	$-7R_{10,4}$	$+2R_{10,4}$	$-1R_{10,4}$	$L_{10,4}=\frac{1}{453948}(5042\,B_1-1351\,B_2)$	$R_{10,4}=\frac{1}{453948}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{10,5}$	$-2L_{10,5}$	$+7L_{10,5}$	$-26L_{10,5}$	$+97L_{10,5}$	$-362R_{10,5}$	$+97R_{10,5}$	$-26R_{10,5}$	$+7R_{10,5}$	$-2R_{10,5}$	$+1R_{10,5}$	$L_{10,5}=\frac{1}{453948}(1351\,B_1-362\,B_2)$	$R_{10,5}=\frac{1}{453948}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{10,6}$	$+2L_{10,6}$	$-7L_{10,6}$	$+26L_{10,6}$	$-97L_{10,6}$	$+362L_{10,6}$	$-97R_{10,6}$	$+26R_{10,6}$	$-7R_{10,6}$	$+2R_{10,6}$	$-1R_{10,6}$	$L_{10,6}=\frac{1}{453948}(362\,B_1-97\,B_2)$	$R_{10,6}=\frac{1}{453948}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{10,7}$	$-2L_{10,7}$	$+7L_{10,7}$	$-26L_{10,7}$	$+97L_{10,7}$	$-362L_{10,7}$	$+1351\ L_{10,7}$	$-26R_{10,7}$	$+7R_{10,7}$	$-2R_{10,7}$	$+1R_{10,7}$	$L_{10,7}=\frac{1}{453948}(97\,B_1-26\,B_2)$	$R_{10,7}=\frac{1}{453948}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{10,8}$	$+2L_{10,8}$	$-7L_{10,8}$	$+26L_{10,8}$	$-97L_{10,8}$	$+362L_{10,8}$	$-1351\ L_{10,8}$	$+5042\ L_{10,8}$	$-7R_{10,8}$	$+2R_{10,8}$	$-1R_{10,8}$	$L_{10,8}=\frac{1}{453948}(26\,B_1-7\,B_2)$	$R_{10,8}=\frac{1}{453948}(5042\,B_1-18817\,B_2)$
$i=9$	$+1L_{10,9}$	$-2L_{10,9}$	$+7L_{10,9}$	$-26L_{10,9}$	$+97L_{10,9}$	$-362L_{10,9}$	$+1351\ L_{10,9}$	$-5042\ L_{10,9}$	$+18817\ L_{10,9}$	$-2R_{10,9}$	$+1R_{10,9}$	$L_{10,9}=\frac{1}{453948}(7\,B_1-2\,B_2)$	$R_{10,9}=\frac{1}{453948}(18817\,B_1-70226\,B_2)$
$i=10$	$-1L_{10,10}$	$+2L_{10,10}$	$-7L_{10,10}$	$+26L_{10,10}$	$-97L_{10,10}$	$+362\ L_{10,10}$	$-1351\ L_{10,10}$	$+5042\ L_{10,10}$	$-18817\ L_{10,10}$	$+70226\ L_{10,10}$	$-1R_{10,10}$	$L_{10,10}=\frac{1}{453948}(2\,B_1-B_2)$	$R_{10,10}=\frac{1}{453948}(70226\,B_1-262087\,B_2)$

6. Tabelle der Stützmomente für starre Einspannung der ersten Stütze und freie Auflagerung der letzten Stütze.

$$M_x = (-1)^{i-1-x}\,|a_x|\,\frac{1}{|a_n|}\left(|b_{n+1-i}|\,B_1 - |b_{n-i}|\,B_2\right)$$
$$M'_x = (-1)^{x+1-i}\,|b_{n-x}|\,\frac{1}{|a_n|}\left(|a_{i-1}|\,B_1 - |a_i|\,B_2\right)$$

$n=2$	M_0	M_1	M_2	$L_{2,i}=\frac{1}{7}(\lvert b_{3-i}\rvert B_1-\lvert b_{2-i}\rvert B_2)$	$R_{2,i}=\frac{1}{7}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{2,1}$	$-1R_{2,1}$	0	$L_{2,1}=\frac{1}{7}(4B_1-B_2)$	$R_{2,1}=\frac{1}{7}(B_1-2B_2)$
$i=2$	$-1L_{2,2}$	$+2L_{2,2}$	0	$L_{2,2}=\frac{1}{7}B_1$	———

$n=3$	M_0	M_1	M_2	M_3	$L_{3,i}=\frac{1}{26}(\lvert b_{4-i}\rvert B_1-\lvert b_{3-i}\rvert B_2)$	$R_{3,i}=\frac{1}{26}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{3,1}$	$-4R_{3,1}$	$+1R_{3,1}$	0	$L_{3,1}=\frac{1}{26}(15B_1-4B_2)$	$R_{3,1}=\frac{1}{26}(B_1-2B_2)$
$i=2$	$-1L_{3,2}$	$+2L_{3,2}$	$-1R_{3,2}$	0	$L_{3,2}=\frac{1}{26}(4B_1-B_2)$	$R_{3,2}=\frac{1}{26}(2B_1-7B_2)$
$i=3$	$+1L_{3,3}$	$-2L_{3,3}$	$+7L_{3,3}$	0	$L_{3,3}=\frac{1}{26}B_1$	———

$n=4$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	$L_{4,i}=\frac{1}{97}(\lvert b_{5-i}\rvert B_1-\lvert b_{4-i}\rvert B_2)$	$R_{4,i}=\frac{1}{97}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{4,1}$	$-15R_{4,1}$	$+4R_{4,1}$	$-1R_{4,1}$	0	$L_{4,1}=\frac{1}{97}(56B_1-15B_2)$	$R_{4,1}=\frac{1}{97}(B_1-2B_2)$
$i=2$	$-1L_{4,2}$	$+2L_{4,2}$	$-4R_{4,2}$	$+1R_{4,2}$	0	$L_{4,2}=\frac{1}{97}(15B_1-4B_2)$	$R_{4,2}=\frac{1}{97}(2B_1-7B_2)$
$i=3$	$+1L_{4,3}$	$-2L_{4,3}$	$+7L_{4,3}$	$-1R_{4,3}$	0	$L_{4,3}=\frac{1}{97}(4B_1-B_2)$	$R_{4,3}=\frac{1}{97}(7B_1-26B_2)$
$i=4$	$-1L_{4,4}$	$+2L_{4,4}$	$-7L_{4,4}$	$+26L_{4,4}$	0	$L_{4,4}=\frac{1}{97}B_1$	———

$n=5$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	$L_{5,i}=\frac{1}{362}(\lvert b_{6-i}\rvert B_1-\lvert b_{5-i}\rvert B_2)$	$R_{5,i}=\frac{1}{362}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{5,1}$	$-56R_{5,1}$	$+15R_{5,1}$	$-4R_{5,1}$	$+1R_{5,1}$	0	$L_{5,1}=\frac{1}{362}(209B_1-56B_2)$	$R_{5,1}=\frac{1}{362}(B_1-2B_2)$
$i=2$	$-1L_{5,2}$	$+2L_{5,2}$	$-15R_{5,2}$	$+4R_{5,2}$	$-1R_{5,2}$	0	$L_{5,2}=\frac{1}{362}(56B_1-15B_2)$	$R_{5,2}=\frac{1}{362}(2B_1-7B_2)$
$i=3$	$+1L_{5,3}$	$-2L_{5,3}$	$+7L_{5,3}$	$-4R_{5,3}$	$+1R_{5,3}$	0	$L_{5,3}=\frac{1}{362}(15B_1-4B_2)$	$R_{5,3}=\frac{1}{362}(7B_1-26B_2)$
$i=4$	$-1L_{5,4}$	$+2L_{5,4}$	$-7L_{5,4}$	$+26L_{5,4}$	$-1R_{5,4}$	0	$L_{5,4}=\frac{1}{362}(4B_1-B_2)$	$R_{5,4}=\frac{1}{362}(26B_1-97B_2)$
$i=5$	$+1L_{5,5}$	$-2L_{5,5}$	$+7L_{5,5}$	$-26L_{5,5}$	$+97L_{5,5}$	0	$L_{5,5}=\frac{1}{362}B_1$	———

$n=6$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	$L_{6,i}=\frac{1}{1351}(\lvert b_{7-i}\rvert B_1-\lvert b_{6-i}\rvert B_2)$	$R_{6,i}=\frac{1}{1351}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{6,1}$	$-209R_{6,1}$	$+56R_{6,1}$	$-15R_{6,1}$	$+4R_{6,1}$	$-1R_{6,1}$	0	$L_{6,1}=\frac{1}{1351}(780B_1-209B_2)$	$R_{6,1}=\frac{1}{1351}(B_1-2B_2)$
$i=2$	$-1L_{6,2}$	$+2L_{6,2}$	$-56R_{6,2}$	$+15R_{6,2}$	$-4R_{6,2}$	$+1R_{6,2}$	0	$L_{6,2}=\frac{1}{1351}(209B_1-56B_2)$	$R_{6,2}=\frac{1}{1351}(2B_1-7B_2)$
$i=3$	$+1L_{6,3}$	$-2L_{6,3}$	$+7L_{6,3}$	$-15R_{6,3}$	$+4R_{6,3}$	$-1R_{6,3}$	0	$L_{6,3}=\frac{1}{1351}(56B_1-15B_2)$	$R_{6,3}=\frac{1}{1351}(7B_1-26B_2)$
$i=4$	$-1L_{6,4}$	$+2L_{6,4}$	$-7L_{6,4}$	$+26L_{6,4}$	$-4R_{6,4}$	$+1R_{6,4}$	0	$L_{6,4}=\frac{1}{1351}(15B_1-4B_2)$	$R_{6,4}=\frac{1}{1351}(26B_1-97B_2)$
$i=5$	$+1L_{6,5}$	$-2L_{6,5}$	$+7L_{6,5}$	$-26L_{6,5}$	$+97L_{6,5}$	$-1R_{6,5}$	0	$L_{6,5}=\frac{1}{1351}(4B_1-B_2)$	$R_{6,5}=\frac{1}{1351}(97B_1-362B_2)$
$i=6$	$-1L_{6,6}$	$+2L_{6,6}$	$-7L_{6,6}$	$+26L_{6,6}$	$-97L_{6,6}$	$+262L_{6,6}$	0	$L_{6,6}=\frac{1}{1351}B_1$	———

$n=7$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	$L_{7,i}=\frac{1}{5042}(\lvert b_{8-i}\rvert B_1-\lvert b_{7-i}\rvert B_2)$	$R_{7,i}=\frac{1}{5042}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{7,1}$	$-780R_{7,1}$	$+209R_{7,1}$	$-56R_{7,1}$	$+15R_{7,1}$	$-4R_{7,1}$	$+1R_{7,1}$	0	$L_{7,1}=\frac{1}{5042}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{7,1}=\frac{1}{5042}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{7,2}$	$+2L_{7,2}$	$-209R_{7,2}$	$+56R_{7,2}$	$-15R_{7,2}$	$+4R_{7,2}$	$-1R_{7,2}$	0	$L_{7,2}=\frac{1}{5042}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{7,2}=\frac{1}{5042}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{7,3}$	$-2L_{7,3}$	$+7L_{7,3}$	$-56R_{7,3}$	$+15R_{7,3}$	$-4R_{7,3}$	$+1R_{7,3}$	0	$L_{7,3}=\frac{1}{5042}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{7,3}=\frac{1}{5042}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{7,4}$	$+2L_{7,4}$	$-7L_{7,4}$	$+26L_{7,4}$	$-15R_{7,4}$	$+4R_{7,4}$	$-1R_{7,4}$	0	$L_{7,4}=\frac{1}{5042}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{7,4}=\frac{1}{5042}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{7,5}$	$-2L_{7,5}$	$+7L_{7,5}$	$-26L_{7,5}$	$+97L_{7,5}$	$-4R_{7,5}$	$+1R_{7,5}$	0	$L_{7,5}=\frac{1}{5042}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{7,5}=\frac{1}{5042}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{7,6}$	$+2L_{7,6}$	$-7L_{7,6}$	$+26L_{7,6}$	$-97L_{7,6}$	$+362L_{7,6}$	$-1R_{7,6}$	0	$L_{7,6}=\frac{1}{5042}(4\,B_1-B_2)$	$R_{7,6}=\frac{1}{5042}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{7,7}$	$-2L_{7,7}$	$+7L_{7,7}$	$-26L_{7,7}$	$+97L_{7,7}$	$-362L_{7,7}$	$+1351L_{7,7}$	0	$L_{7,7}=\frac{1}{5042}B_1$	———

$n=8$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$L_{8,i}=\frac{1}{18817}(\lvert b_{9-i}\rvert B_1-\lvert b_{8-i}\rvert B_2)$	$R_{8,i}=\frac{1}{18817}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{8,1}$	$-2911R_{8,1}$	$+780R_{8,1}$	$-209R_{8,1}$	$+56R_{8,1}$	$-15R_{8,1}$	$+4R_{8,1}$	$-1R_{8,1}$	0	$L_{8,1}=\frac{1}{18817}(10864\,B_1-2911\,B_2)$	$R_{8,1}=\frac{1}{18817}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{8,2}$	$+2L_{8,2}$	$-780R_{8,2}$	$+209R_{8,2}$	$-56R_{8,2}$	$+15R_{8,2}$	$-4R_{8,2}$	$+1R_{8,2}$	0	$L_{8,2}=\frac{1}{18817}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{8,2}=\frac{1}{18817}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{8,3}$	$-2L_{8,3}$	$+7L_{8,3}$	$-209R_{8,3}$	$+56R_{8,3}$	$-15R_{8,3}$	$+4R_{8,3}$	$-1R_{8,3}$	0	$L_{8,3}=\frac{1}{18817}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{8,3}=\frac{1}{18817}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{8,4}$	$+2L_{8,4}$	$-7L_{8,4}$	$+26L_{8,4}$	$-56R_{8,4}$	$+15R_{8,4}$	$-4R_{8,4}$	$+1R_{8,4}$	0	$L_{8,4}=\frac{1}{18817}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{8,4}=\frac{1}{18817}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{8,5}$	$-2L_{8,5}$	$+7L_{8,5}$	$-26L_{8,5}$	$+97L_{8,5}$	$-15R_{8,5}$	$+4R_{8,5}$	$-1R_{8,5}$	0	$L_{8,5}=\frac{1}{18817}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{8,5}=\frac{1}{18817}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{8,6}$	$+2L_{8,6}$	$-7L_{8,6}$	$+26L_{8,6}$	$-97L_{8,6}$	$+362L_{8,6}$	$-4R_{8,6}$	$+1R_{8,6}$	0	$L_{8,6}=\frac{1}{18817}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{8,6}=\frac{1}{18817}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{8,7}$	$-2L_{8,7}$	$+7L_{8,7}$	$-26L_{8,7}$	$+97L_{8,7}$	$-362L_{8,7}$	$+1351L_{8,7}$	$-1R_{8,7}$	0	$L_{8,7}=\frac{1}{18817}(4\,B_1-B_2)$	$R_{8,7}=\frac{1}{18817}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{8,8}$	$+2L_{8,8}$	$-7L_{8,8}$	$+26L_{8,8}$	$-97L_{8,8}$	$+362L_{8,8}$	$-1351L_{8,8}$	$+5042L_{8,8}$	0	$L_{8,8}=\frac{1}{18817}B_1$	———

$n=9$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	$L_{9,i}=\frac{1}{70226}(\lvert b_{10-i}\rvert B_1-\lvert b_{9-i}\rvert B_2)$	$R_{9,i}=\frac{1}{70226}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{9,1}$	$-10864\ R_{9,1}$	$+2911\ R_{9,1}$	$-780R_{9,1}$	$+209R_{9,1}$	$-56R_{9,1}$	$+15R_{9,1}$	$-4R_{9,1}$	$+1R_{9,1}$	0	$L_{9,1}=\frac{1}{70226}(40545\,B_1-10864\,B_2)$	$R_{9,1}=\frac{1}{70226}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{9,2}$	$+2L_{9,2}$	$-2911\ R_{9,2}$	$+780R_{9,2}$	$-209R_{9,2}$	$+56R_{9,2}$	$-15R_{9,2}$	$+4R_{9,2}$	$-1R_{9,2}$	0	$L_{9,2}=\frac{1}{70226}(10864\,B_1-2911\,B_2)$	$R_{9,2}=\frac{1}{70226}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{9,3}$	$-2L_{9,3}$	$+7L_{9,3}$	$-780R_{9,3}$	$+290R_{9,3}$	$-56R_{9,3}$	$+15R_{9,3}$	$-4R_{9,3}$	$+1R_{9,3}$	0	$L_{9,3}=\frac{1}{70226}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{9,3}=\frac{1}{70226}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{9,4}$	$+2L_{9,4}$	$-7L_{9,4}$	$+26L_{9,4}$	$-209R_{9,4}$	$+56R_{9,4}$	$-15R_{9,4}$	$+4R_{9,4}$	$-1R_{9,4}$	0	$L_{9,4}=\frac{1}{70226}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{9,4}=\frac{1}{70226}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{9,5}$	$-2L_{9,5}$	$+7L_{9,5}$	$-26L_{9,5}$	$+97L_{9,5}$	$-56R_{9,5}$	$+15R_{9,5}$	$-4R_{9,5}$	$+1R_{9,5}$	0	$L_{9,5}=\frac{1}{70226}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{9,5}=\frac{1}{70226}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{9,6}$	$+2L_{9,6}$	$-7L_{9,6}$	$+26L_{9,6}$	$-97L_{9,6}$	$+362L_{9,6}$	$-15R_{9,6}$	$+4R_{9,6}$	$-1R_{9,6}$	0	$L_{9,6}=\frac{1}{70226}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{9,6}=\frac{1}{70226}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{9,7}$	$-2L_{9,7}$	$+7L_{9,7}$	$-26L_{9,7}$	$+97L_{9,7}$	$-362L_{9,7}$	$+1351\ L_{9,7}$	$-4R_{9,7}$	$+1R_{9,7}$	0	$L_{9,7}=\frac{1}{70226}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{9,7}=\frac{1}{70226}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{9,8}$	$+2L_{9,8}$	$-7L_{9,8}$	$+26L_{9,8}$	$-97L_{9,8}$	$+326L_{9,8}$	$-1351\ L_{9,8}$	$+5042\ L_{9,8}$	$-1R_{9,8}$	0	$L_{9,8}=\frac{1}{70226}(4\,B_1-B_2)$	$R_{9,8}=\frac{1}{70226}(5042\,B_1-18817\,B_2)$
$i=9$	$+1L_{9,9}$	$-2L_{9,9}$	$+7L_{9,9}$	$-26L_{9,9}$	$+97L_{9,9}$	$-362L_{9,9}$	$+1351\ L_{9,9}$	$-5042\ L_{9,9}$	$+18817\ L_{9,9}$	0	$L_{9,9}=\frac{1}{70226}\,B_1$	———

$n=10$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	$L_{10,i}=\frac{1}{262087}(\lvert b_{11-i}\rvert B_1-\lvert b_{10-i}\rvert B_2)$	$R_{10,i}=\frac{1}{262087}(\lvert a_{i-1}\rvert B_1-\lvert a_i\rvert B_2)$
$i=1$	$+1L_{10,1}$	$-40545\ R_{10,1}$	$+10864\ R_{10,1}$	$-2911\ R_{10,1}$	$+780R_{10,1}$	$-209R_{10,1}$	$+56R_{10,1}$	$-15R_{10,1}$	$+4R_{10,1}$	$-1R_{10,1}$	0	$L_{10,1}=\frac{1}{262087}(151316\,B_1-40515\,B_2)$	$R_{10,1}=\frac{1}{262087}(B_1-2\,B_2)$
$i=2$	$-1L_{10,2}$	$+2L_{10,2}$	$-10864\ R_{10,2}$	$+2911\ R_{10,2}$	$-780R_{10,2}$	$+209R_{10,2}$	$-56R_{10,2}$	$+15R_{10,2}$	$-4R_{10,2}$	$+1R_{10,2}$	0	$L_{10,2}=\frac{1}{262087}(40545\,B_1-10864\,B_2)$	$R_{10,2}=\frac{1}{262087}(2\,B_1-7\,B_2)$
$i=3$	$+1L_{10,3}$	$-2L_{10,3}$	$+7L_{10,3}$	$-2911\ R_{10,3}$	$+780R_{10,3}$	$-209R_{10,3}$	$+56R_{10,3}$	$-15R_{10,3}$	$+4R_{10,3}$	$-1R_{10,3}$	0	$L_{10,3}=\frac{1}{262087}(10864\,B_1-2911\,B_2)$	$R_{10,3}=\frac{1}{262087}(7\,B_1-26\,B_2)$
$i=4$	$-1L_{10,4}$	$+2L_{10,4}$	$-7L_{10,4}$	$+26L_{10,4}$	$-780R_{10,4}$	$+209R_{10,4}$	$-56R_{10,4}$	$+15R_{10,4}$	$-4R_{10,4}$	$+1R_{10,4}$	0	$L_{10,4}=\frac{1}{262087}(2911\,B_1-780\,B_2)$	$R_{10,4}=\frac{1}{262087}(26\,B_1-97\,B_2)$
$i=5$	$+1L_{10,5}$	$-2L_{10,5}$	$+7L_{10,5}$	$-26L_{10,5}$	$+97L_{10,5}$	$-209R_{10,5}$	$+56R_{10,5}$	$-15R_{10,5}$	$+4R_{10,5}$	$-1R_{10,5}$	0	$L_{10,5}=\frac{1}{262087}(780\,B_1-209\,B_2)$	$R_{10,5}=\frac{1}{262087}(97\,B_1-362\,B_2)$
$i=6$	$-1L_{10,6}$	$+2L_{10,6}$	$-7L_{10,6}$	$+26L_{10,6}$	$-97L_{10,6}$	$+362L_{10,6}$	$-56R_{10,6}$	$+15R_{10,6}$	$-4R_{10,6}$	$+1R_{10,6}$	0	$L_{10,6}=\frac{1}{262087}(209\,B_1-56\,B_2)$	$R_{10,6}=\frac{1}{262087}(362\,B_1-1351\,B_2)$
$i=7$	$+1L_{10,7}$	$-2L_{10,7}$	$+7L_{10,7}$	$-26L_{10,7}$	$+97L_{10,7}$	$-362L_{10,7}$	$+1351\ L_{10,7}$	$-15R_{10,7}$	$+4R_{10,7}$	$-1R_{10,7}$	0	$L_{10,7}=\frac{1}{262087}(56\,B_1-15\,B_2)$	$R_{10,7}=\frac{1}{262087}(1351\,B_1-5042\,B_2)$
$i=8$	$-1L_{10,8}$	$+2L_{10,8}$	$-7L_{10,8}$	$+26L_{10,8}$	$-97L_{10,8}$	$+362L_{10,8}$	$-1351\ L_{10,8}$	$+5042\ L_{10,8}$	$-4R_{10,8}$	$+1R_{10,8}$	0	$L_{10,8}=\frac{1}{262087}(15\,B_1-4\,B_2)$	$R_{10,8}=\frac{1}{262087}(5042\,B_1-18817\,B_2)$
$i=9$	$+1L_{10,9}$	$-2L_{10,9}$	$+7L_{10,9}$	$-26L_{10,9}$	$+97L_{10,9}$	$-362L_{10,9}$	$+1351\ L_{10,9}$	$-5042\ L_{10,9}$	$+18817\ L_{10,9}$	$-1R_{10,9}$	0	$L_{10,9}=\frac{1}{262087}(4\,B_1-B_2)$	$R_{10,9}=\frac{1}{262087}(18817\,B_1-70226\,B_2)$
$i=10$	$-1L_{10,10}$	$+2L_{10,10}$	$-7L_{10,10}$	$+26L_{10,10}$	$-97L_{10,10}$	$+362\ L_{10,10}$	$-1351\ L_{10,10}$	$+5042\ L_{10,10}$	$+18817\ L_{10,10}$	$+70226\ L_{10,10}$	0	$L_{10,10}=\frac{1}{262087}\,B_1$	———

Schließlich kommt

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{a_x}{a_n}\left(b_{n+1-i}\,B_1 + b_{n-i}\,B_2\right) = (-1)^{i-1-x}|a_x|\,\frac{1}{|a_n|}\left(|b_{n+1-i}|\,B_1 - |b_{n-i}|\,B_2\right), \\ M'_x &= -\frac{1}{a_n}\left[\left(b_{n+1-i}\,a_x - a_n\,b_{x+1-i}\right)B_1 + \left(b_{n-i}\,a_x - a_n\,b_{x-i}\right)B_2\right] = \\ &= -\frac{b_{n-x}}{a_n}\left(a_{i-1}\,B_1 + a_i\,B_2\right) = (-1)^{x+1-i}|b_{n-x}|\,\frac{1}{|a_n|}\left(|a_{i-1}|\,B_1 - |a_i|\,B_2\right). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

In den folgenden Tabellen 4 bis 6 sind die nach 5a bis c ermittelten Stützmomente für homogene Träger bis zu 10 Feldern in übersichtlichen Zahlentafeln zusammengestellt. Sie enthalten, fortlaufend geordnet nach Einfeldbelastungen vom ersten bis letzten Feld, die Zahlenwerte für die Stützmomente in Abhängigkeit von neuen, durch zweckmäßige Zusammenfassung gebildeten Belastungsgliedern $L_{n,i}$ und $R_{n,i}$.

d) Bestimmung der Auflagerkräfte. Berücksichtigen wir, daß nur das i-te Feld belastet ist, so können wir mit dieser Einschränkung die Ergebnisse aus (12) übernehmen und erhalten folgendes Schema:

	A_0	A_x	A_{i-1}	A_i	A'_x	A'_n
freie Auflagerung	$-\frac{M_1}{l}$	$6\frac{M_x}{l}$	$6\frac{M_{i-1}}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l (l-\xi)^3 q(\xi)\,d\xi$	$6\frac{M_i}{l} + \frac{1}{l^3}\int_0^l \xi^3 q(\xi)\,d\xi$	$6\frac{M'_x}{l}$	$-\frac{M'_{n-1}}{l}$
starre Einspannung	$+3\frac{M_0}{l}$					$+3\frac{M'_n}{l}$

(20)

Hierin sind wieder die Stützmomente für den entsprechenden Lagerungsfall einzusetzen, wobei die Werte aus den Tabellen 4, 5 oder 6 für die betreffende Felderzahl aus der Spalte für das belastete Feld entnommen werden können.

6. Zusammenfassung. Der von *Clebsch* angegebene Ansatz zur Lösung der Differenzengleichung für die Stützmomente des homogenen durchlaufenden Trägers wird durch Einführung konjugierter Zahlen a_x und b_x in eine für die Rechnung bequemere Form $M_x = \frac{1}{6}B + C_1 a_x + C_2 b_x$ gebracht. Nach dieser Darstellung werden die drei Lagerungsfälle des homogenen durchlaufenden Trägers behandelt und die Stützmomente in Abhängigkeit der Belastungsglieder in Form von Zahlenpyramiden übersichtlich zusammengestellt.

Schließlich werden nach derselben Methode die drei Lagerungsfälle eines Trägers mit gleichen Stützweiten und einer einzigen Feldbelastung behandelt. Mit dieser Belastungsart als Unterbelastungsfall kann ein Träger mit gleichen Stützweiten und beliebigen Feldbelastungen nach dem Superpositionsgesetz durch Überlagerung aller Unterbelastungsfälle geschlossen behandelt werden.

(Eingegangen am 16. September 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johann Fadle*, (17a) Karlsruhe, Georg-Friedrich-Straße 17.

Der Einfluß der Dämpfung bei nichtlinearen Schwingungen.

I. Gedämpfte Pendelschwingungen.

Von **F. K. Rubbert.**

1. Einleitung. Die wichtige Frage nach dem Einfluß der Dämpfung bei Pendelschwingungen endlicher Amplitude ist bisher nicht befriedigend beantwortet worden. Und zwar handelt es sich dabei um die der Geschwindigkeit und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung und die Festreibung. Die analytischen Schwierigkeiten dieser nichtlinearen Differentialgleichungen sind derart, daß selbst rohe Näherungen noch nicht angegeben werden konnten. *Willers*[1] hat deshalb bei der quadratischen Dämpfung graphische und *Spaeth*[2] bei der linearen Dämpfung numerische Methoden angewandt. Bemerkenswert ist die Arbeit von *Zech*[3], der zu Aussagen über das Abklingen nichtlinearer Schwingungen mit Hilfe der „Umrißlinien" gelangte.

Während bei der Differentialgleichung für quadratische Dämpfung durch Anwendung der Identität $\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\, d(\dot{\varphi}^2)/d\varphi$ die Trennung der Veränderlichen ausführbar und erst die daraus folgende Differentialgleichung erster Ordnung nicht in geschlossener Form lösbar ist, besitzt die Pendelgleichung für lineare Dämpfung überhaupt keinen Angriffspunkt. Diese Schwierigkeiten lassen sich umgehen, indem man die direkte Integration anwendet. Das Ergebnis erscheint hierbei in Form einer Reihe, die nach Potenzen eines Parameters fortschreitet und deren Koeffizienten nacheinander aus linearen Differentialgleichungen berechnet werden. Leichte Umformung ergibt schließlich die *Fourier*entwicklung der gesuchten Lösung. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist von *Poincaré*[4] untersucht worden.

Die Differentialgleichung des Pendels mit endlicher Amplitude und linearer Dämpfung ist bereits von *Moigno*[5], *Broch*[6] und *Horn*[7] auf diese Weise behandelt worden. Aber alle diese Lösungen können nicht richtig sein, da sie für verschwindende Dämpfung ungültig werden. Damit ist aber auch schon der Punkt berührt, dessen Beachtung die wahre Formel liefert.

In einer zweiten Mitteilung soll die Wirkung der Dämpfung bei unsymmetrischen Schwingungen behandelt werden.

2. Das Pendel mit quadratischer Dämpfung. Auf ein ebenes Pendel mit dem Trägheitsmoment Θ und dem Schweremoment S wirke eine dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung; seine Bewegungsgleichung lautet, wenn φ den gegen die Gleichgewichtslage gemessenen Auslenkungswinkel bedeutet,

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + (\operatorname{sgn}\dot{\varphi})\, R\,\dot{\varphi}^2 + S \sin\varphi = 0\,. \tag{1}$$

Hieraus erhält man mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \alpha\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \tag{2}$$

für die erste Halbschwingung die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + n^2 \sin\varphi = \frac{1}{2}\, h\,\dot{\varphi}^2 \tag{3}$$

mit

$$n^2 = \frac{S}{\Theta}\,, \qquad \frac{1}{2}\, h = \frac{R}{\Theta}\,. \tag{4}$$

Wir führen zunächst mit einem noch offen gelassenen Parameter $\varkappa$ eine neue unabhängige Veränderliche ein:

$$\tau = \frac{n\,t}{\sqrt{1+\varkappa}} \tag{5}$$

und setzen

$$q = \frac{h}{2\,\alpha}\,. \tag{6}$$

---

[1] *F. A. Willers*, Z. Instrumentenkunde 53 (1933) S. 504.
[2] *A. Spaeth*, Dissertation, Göttingen 1940.
[3] *Th. Zech*, Ing.-Arch. 13 (1942) S. 21.
[4] *H. Poincaré*, Méthodes nouvelles, Bd. I (1892) S. 58 ff.; auch *E. Picard*, Traité d'analyse, Bd. III (1896) S. 157 ff.
[5] *M. Moigno*, Calcul intégral (1844), S. 584 ff.
[6] *O. J. Broch*, Lehrbuch der Mechanik (1854), S. 207 ff.
[7] *J. Horn*, Z. Math. Phys. 47 (1902), S. 400, §§ 5, 6.

Die Differentialgleichung (3) geht dann über in

$$\varphi'' + (1+\varkappa)\,\varphi = \alpha q \varphi'^2 + (1+\varkappa)\left(\frac{1}{3!}\,\varphi^3 - \frac{1}{5!}\,\varphi^5 + \cdots\right), \tag{7}$$

wobei die Striche nun Ableitungen nach τ bedeuten.

Mit den Ansätzen

$$\varphi = \alpha\,\Phi_1(\tau) + \alpha^3\,\Phi_3(\tau) + \alpha^5\,\Phi_5(\tau) + \cdots, \tag{8}$$

$$\varkappa = \alpha^2 c_2 + \alpha^4 c_4 + \cdots \tag{9}$$

ergeben sich für die $\Phi_i(\tau)$ die linearen Differentialgleichungen

$$\Phi_1'' + \Phi_1 = 0\,, \tag{10}$$

$$\Phi_3'' + \Phi_3 = -c_2\,\Phi_1 + q\,\Phi_1'^2 + \frac{1}{6}\,\Phi_1^3\,, \tag{11}$$

$$\Phi_5'' + \Phi_5 = -c_2\,\Phi_3 - c_4\,\Phi_1 + 2q\,\Phi_1'\,\Phi_3' + \frac{1}{2}\,\Phi_1^2\,\Phi_3 + \frac{1}{6}\,c_2\,\Phi_1^3 - \frac{1}{5!}\,\Phi_1^5 \tag{12}$$

usw. mit den Anfangsbedingungen

$$\Phi_1(0) = 1\,, \qquad \Phi_1'(0) = 0\,, \tag{13}$$

$$\Phi_3(0) = 0\,, \qquad \Phi_3'(0) = 0\,, \tag{14}$$

$$\Phi_5(0) = 0\,, \qquad \Phi_5'(0) = 0 \tag{15}$$

usw.

Hieraus erhalten wir zunächst

$$\Phi_1 = \cos\tau \tag{16}$$

und damit für Φ_3 die Differentialgleichung

$$\Phi_3'' + \Phi_3 = \frac{1}{2}\,q + \left(\frac{1}{8} - c_2\right)\cos\tau - \frac{1}{2}\,q\cos 2\tau + \frac{1}{24}\cos 3\tau\,. \tag{17}$$

Damit auf der rechten Seite das Glied mit $\cos\tau$ verschwindet, muß sein

$$c_2 = \frac{1}{8}\,. \tag{18}$$

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (17) ergibt sich dann

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\,q + \left(\frac{1}{192} - \frac{2}{3}\,q\right)\cos\tau + \frac{1}{6}\,q\cos 2\tau - \frac{1}{192}\cos 3\tau\,, \tag{19}$$

und hiermit bekommen wir für Φ_5 die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\Phi_5'' + \Phi_5 = {} & \left(\frac{17}{192}q - \frac{2}{3}\,q^2\right) + \left(\frac{17}{1536} - \frac{1}{6}\,q + \frac{1}{3}\,q^2 - c_4\right)\cos\tau + \left(\frac{1}{8}\,q + \frac{2}{3}\,q^2\right)\cos 2\tau + \\ & + \left(\frac{1}{384} - \frac{1}{12}\,q - \frac{1}{3}\,q^2\right)\cos 3\tau + \frac{7}{192}\,q\cos 4\tau - \frac{3}{2560}\cos 5\tau\,.\end{aligned} \tag{20}$$

Die Bedingung für eine periodische Lösung lautet jetzt

$$c_4 = \frac{17}{1536} - \frac{1}{6}\,q + \frac{1}{3}\,q^2 \tag{21}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\Phi_5 = {} & \left(\frac{17}{192}\,q - \frac{2}{3}\,q^2\right) + \left(\frac{17}{61440} - \frac{27}{512}\,q + \frac{61}{72}\,q^2\right)\cos\tau - \left(\frac{1}{24}\,q + \frac{2}{9}\,q^2\right)\cos 2\tau - \\ & - \left(\frac{1}{3072} - \frac{1}{96}\,q - \frac{1}{24}\,q^2\right)\cos 3\tau - \frac{7}{1536}\,q\cos 4\tau + \frac{1}{20480}\cos 5\tau\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (16), (19) und (22) in (8) erhalten wir daher in dritter Näherung für die *Fourier*entwicklung der gesuchten Lösung

$$\varphi = A_0 + A_1\cos\tau + A_2\cos 2\tau + A_3\cos 3\tau + A_4\cos 4\tau + A_5\cos 5\tau \tag{23}$$

mit den Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{4}\,\alpha^2 h - \frac{1}{6}\,\alpha^3 h^2 + \frac{17}{384}\,\alpha^4 h\,, \tag{24}$$

$$A_1 = \alpha + \frac{1}{192}\,\alpha^3 - \frac{1}{3}\,\alpha^2 h + \frac{61}{288}\,\alpha^3 h^2 - \frac{27}{1024}\,\alpha^4 h + \frac{17}{61440}\,\alpha^5\,, \tag{25}$$

$$A_2 = \frac{1}{12}\,\alpha^2 h - \frac{1}{18}\,\alpha^3 h^2 - \frac{1}{48}\,\alpha^4 h\,, \tag{26}$$

$$A_3 = -\frac{1}{192}\alpha^3 + \frac{1}{96}\alpha^3 h^2 + \frac{1}{192}\alpha^4 h - \frac{1}{3072}\alpha^5, \tag{27}$$

$$A_4 = -\frac{7}{3072}\alpha^4 h, \tag{28}$$

$$A_5 = \frac{1}{20480}\alpha^5. \tag{29}$$

Der erste Umkehrpunkt wird erreicht für $\tau = \pi$. Für die Dauer der ersten Halbschwingung folgt daher aus (5) nach Einsetzen von (18) und (21)

$$T_1 = \frac{\pi}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{8}\alpha^2\left(1 + \frac{2}{3}h^2\right) - \frac{1}{12}\alpha^3 h + \frac{17}{1536}\alpha^4} \tag{30}$$

oder

$$T_1 = \frac{\pi}{n}\left[1 + \frac{1}{16}\alpha^2\left(1 + \frac{2}{3}h^2\right) - \frac{1}{24}\alpha^3 h + \frac{11}{3072}\alpha^4\right]. \tag{30a}$$

Die Amplitude im ersten Umkehrpunkt ist

$$\varphi_1 = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$|\varphi_1| = \alpha - \frac{2}{3}\alpha^2 h + \frac{4}{9}\alpha^3 h^2 - \frac{65}{1536}\alpha^4 h. \tag{31}$$

Für $h = 0$ reduziert sich Gleichung (3) auf die der ungedämpften Pendelschwingungen endlicher Amplitude

$$\ddot{\varphi} + n^2 \sin\varphi = 0. \tag{32}$$

Ihre strenge Lösung bei den Anfangsbedingungen (2) ist bekannt und läßt sich durch Anwendung elliptischer Funktionen in geschlossener Form angeben:

$$\varphi = 2\arcsin\left(k\frac{\operatorname{cn} nt}{\operatorname{dn} nt}\right) \tag{33}$$

mit

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{34}$$

Die ersten Glieder ihrer *Fourier*entwicklung erhalten wir, wenn wir in (23) bis (29) $h = 0$ setzen; es folgt

$$\varphi = \left(\alpha + \frac{1}{192}\alpha^3 + \frac{17}{61440}\alpha^5\right)\cos\tau - \left(\frac{1}{192}\alpha^3 + \frac{1}{3072}\alpha^5\right)\cos 3\tau + \frac{1}{20480}\alpha^5\cos 5\tau \tag{35}$$

mit

$$\tau = \frac{nt}{\sqrt{1 + \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{17}{1536}\alpha^4}}. \tag{36}$$

Auch die Dauer einer Halbschwingung läßt sich in einfacher Form darstellen, und zwar durch Anwendung des vollständigen elliptischen Normalintegrals erster Gattung:

$$T = \frac{2}{n}K = \frac{\pi}{n}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \tag{37}$$

Die Entwicklung der hypergeometrischen Reihe ergibt in dritter Näherung

$$T = \frac{\pi}{n}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{11}{3072}\alpha^4\right), \tag{38}$$

was genau mit Formel (30a) für $h = 0$ übereinstimmt.

Ein weiterer Sonderfall, der in unserer Lösung enthalten ist, ist der der kleinen Schwingungen mit quadratischer Dämpfung. Ihre Differentialgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}h(\operatorname{sgn}\dot{\varphi})\dot{\varphi}^2 + n^2\varphi = 0. \tag{39}$$

Vernachlässigen wir in den durch (24) bis (29) dargestellten Koeffizienten alle Glieder, die von der endlichen Amplitude herrühren, so folgt bei den Anfangsbedingungen (2) für die ersten Glieder ihrer Lösung als *Fourier*reihe

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi}{\alpha} = &\left(\frac{1}{4}\alpha h - \frac{1}{6}\alpha^2 h^2\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\alpha h + \frac{61}{288}\alpha^2 h^2\right)\cos\tau + \\ &+ \left(\frac{1}{12}\alpha h - \frac{1}{18}\alpha^2 h^2\right)\cos 2\tau + \frac{1}{96}\alpha^2 h^2\cos 3\tau\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

mit

$$\tau = \frac{n\,t}{\sqrt{1+\frac{1}{12}\,\alpha^2 h^2}}\,. \tag{41}$$

Für die Dauer der ersten Halbschwingung erhalten wir

$$T_1 = \frac{\pi}{n}\left(1+\frac{1}{24}\,\alpha^2\,h^2\right) \tag{42}$$

und für die Amplitude im ersten Umkehrpunkt

$$|\varphi_1| = \alpha\left(1-\frac{2}{3}\,\alpha h+\frac{4}{9}\,\alpha^2 h^2\right). \tag{43}$$

Die Formeln (40) bis (43) sind bereits auf eine etwas andere Art von *Burkhardt*[1] abgeleitet worden.

3. Das Pendel mit Reibung. Seine Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + n^2 \sin\varphi + s\,n^2\,(\operatorname{sgn}\dot{\varphi}) = 0\,, \tag{1}$$

und die Anfangsbedingungen seien

$$\varphi(0) = \alpha\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0\,. \tag{2}$$

Wir führen wieder eine neue unabhängige Veränderliche ein durch

$$\tau = \frac{n\,t}{\sqrt{1+\varkappa}}\,. \tag{3}$$

Die Differentialgleichung für die erste Halbschwingung ist dann

$$\varphi'' + (1+\varkappa)\,\varphi = \alpha\sigma(1+\varkappa) + (1+\varkappa)\left(\frac{1}{3!}\,\varphi^3 - \frac{1}{5!}\,\varphi^5 + \cdots\right) \tag{4}$$

mit

$$\sigma = \frac{s}{\alpha}\,. \tag{5}$$

Mit den Ansätzen

$$\varphi = \alpha\,\Phi_1(\tau) + \alpha^3\,\Phi_3(\tau) + \alpha^5\,\Phi_5(\tau) + \cdots\,, \tag{6}$$

$$\varkappa = \alpha^2\,c_2 + \alpha^4\,c_4 + \cdots \tag{7}$$

bekommen wir für die $\Phi_i(\tau)$ die linearen Differentialgleichungen

$$\Phi_1'' + \Phi_1 = \sigma\,, \tag{8}$$

$$\Phi_3'' + \Phi_3 = \sigma\,c_2 - c_2\,\Phi_1 + \frac{1}{6}\,\Phi_1^3\,, \tag{9}$$

$$\Phi_5'' + \Phi_5 = \sigma\,c_4 - c_4\,\Phi_1 - c_2\,\Phi_3 + \frac{1}{6}\,c_2\,\Phi_1^3 + \frac{1}{2}\,\Phi_1^2\,\Phi_3 - \frac{1}{5!}\,\Phi_1^5 \tag{10}$$

usw. mit den Anfangsbedingungen

$$\Phi_1(0) = 1\,, \qquad \Phi_1'(0) = 0\,, \tag{11}$$

$$\Phi_3(0) = 0\,, \qquad \Phi_3'(0) = 0\,, \tag{12}$$

$$\Phi_5(0) = 0\,, \qquad \Phi_5'(0) = 0 \quad \text{usw.} \tag{13}$$

Zunächst ergibt sich aus (8) und (11)

$$\Phi_1 = \sigma + (1-\sigma)\cos\tau\,, \tag{14}$$

und damit bekommen wir für Φ_3 die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}\Phi_3'' + \Phi_3 = \frac{1}{4}\,\sigma(1-\sigma)^2 + \frac{1}{6}\,\sigma^3 + (1-\sigma)\left[\frac{1}{2}\,\sigma^2 + \frac{1}{8}\,(1-\sigma)^2 - c_2\right]\cos\tau + \\ + \frac{1}{4}\,\sigma(1-\sigma)^2\cos 2\tau + \frac{1}{24}\,(1-\sigma)^3\cos 3\tau\,.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Für eine periodische Lösung muß

$$c_2 = \frac{1}{2}\,\sigma^2 + \frac{1}{8}\,(1-\sigma)^2 \tag{16}$$

sein; das allgemeine Integral von (15) ist dann

$$\left.\begin{aligned}\Phi_3 = \frac{1}{4}\,\sigma\,(1-\sigma)^2 + \frac{1}{6}\,\sigma^3 - \left[\frac{1}{6}\,\sigma^3 + \frac{1}{6}\,\sigma\,(1-\sigma)^2 - \frac{1}{192}\,(1-\sigma)^3\right]\cos\tau - \\ - \frac{1}{12}\,\sigma\,(1-\sigma)^2\cos 2\tau - \frac{1}{192}\,(1-\sigma)^3\cos 3\tau\,.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

[1] *H. Burkhardt*, Z. Math. Phys. 63 (1915) S. 303.

Durch Einsetzen von (14) und (17) in den Ansatz (6) erhalten wir für die zweite Näherung der gesuchten Lösung als *Fourier*reihe

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \left[s + \frac{1}{4}\,s\,(\alpha - s)^2 + \frac{1}{6}\,s^3\right] + \left[(\alpha - s) - \frac{1}{6}\,s(\alpha - s)^2 + \frac{1}{192}\,(\alpha - s)^3 - \right.\\ \left. - \frac{1}{6}\,s^3\right]\cos\tau - \frac{1}{12}\,s(\alpha - s)^2\cos 2\tau - \frac{1}{192}\,(\alpha - s)^3\cos 3\tau\,.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Der erste Umkehrpunkt wird erreicht für $\tau = \pi$. Die Dauer der ersten Halbschwingung ist daher nach (3)

$$T_1 = \frac{\pi}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{8}\,(\alpha - s)^2 + \frac{1}{2}\,s^2} \tag{19}$$

oder

$$T_1 = \frac{\pi}{n}\left[1 + \frac{1}{16}\,(\alpha - s)^2 + \frac{1}{4}\,s^2\right]. \tag{19a}$$

Für die Amplitude im ersten Umkehrpunkt ergibt sich

$$|\varphi_1| = \alpha - 2s - \frac{1}{3}\,s\,(\alpha - s)^2 - \frac{1}{3}\,s^3\,. \tag{20}$$

Für die praktische Anwendung wird die zweite Näherung stets ausreichen. Es macht aber durchaus keine Schwierigkeit, auch die weiteren Glieder zu berechnen; nur die Rechenarbeit nimmt mit jedem weiteren Glied erheblich zu.

Auch die Differentialgleichung eines Pendels mit Reibung und quadratischer Dämpfung läßt sich auf diese Weise mit jeder gewünschten Genauigkeit integrieren.

4. Das Pendel mit linearer Dämpfung. Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$\ddot{\varphi} + 2\,k\,\dot{\varphi} + n^2 \sin\varphi = 0\,. \tag{1}$$

Die Anfangsbedingungen seien wieder

$$\varphi(0) = \alpha\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0\,. \tag{2}$$

Mit

$$\tau = n\,t\,, \qquad \delta = \frac{k}{n} \tag{3), (4}$$

und bei Beschränkung auf die zweite Näherung geht (1) über in

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\,\delta\,\frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi = \frac{1}{6}\,\varphi^3\,. \tag{5}$$

Wir fragen nach einer Lösung dieser Differentialgleichung, die für kleine α in das bekannte Integral der linearen Gleichung übergeht und sich für $\delta = 0$ auf die Formel (35) von Ziff. 2 für die ungedämpfte Schwingung endlicher Amplitude reduziert. Das können wir aber nur erreichen, indem wir eine neue unabhängige Veränderliche ϑ einführen durch

$$\tau = \vartheta + c\,\alpha^2\,(1 - e^{-2\,\delta\,\vartheta})\,, \tag{6}$$

wo die Konstante c bei der Integration in der gewünschten Weise bestimmt wird.

Wegen

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\frac{d\tau}{d\vartheta}}\,, \qquad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}}{\left(\frac{d\tau}{d\vartheta}\right)^2} - \frac{d\varphi}{d\vartheta}\,\frac{\frac{d^2\tau}{d\vartheta^2}}{\left(\frac{d\tau}{d\vartheta}\right)^3}$$

ist in zweiter Näherung

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\vartheta}\,(1 - 2\,\alpha^2\,c\,\delta\,e^{-2\,\delta\,\vartheta})\,,$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}\,(1 - 4\,\alpha^2\,c\,\delta e^{-2\,\delta\,\vartheta}) + \frac{d\varphi}{d\vartheta}\,(4\,\alpha^2\,c\,\delta^2\,e^{-2\,\delta\,\vartheta})\,,$$

und statt (5) bekommen wir die Differentialgleichung

$$\varphi''\,(1 - 4\,\alpha^2\,c\,\delta\,e^{-2\,\delta\,\vartheta}) + 2\,\delta\,\varphi' + \varphi = \frac{1}{6}\,\varphi^3\,, \tag{7}$$

wo die Striche nun Ableitungen nach ϑ bedeuten.

Zu ihrer Integration machen wir den Ansatz

$$\varphi = \alpha\,\Phi_1(\vartheta) + \alpha^3\,\Phi_3(\vartheta) \tag{8}$$

und erhalten für Φ_1 und Φ_3 die linearen Differentialgleichungen

$$\Phi_1'' + 2\,\delta\,\Phi_1' + \Phi_1 = 0\,, \tag{9}$$

$$\Phi_3'' + 2\,\delta\,\Phi_3' + \Phi_3 = \frac{1}{6}\,\Phi_1^3 + 4\,c\,\delta\,e^{-2\,\delta\,\vartheta}\,\Phi_1'' \tag{10}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\Phi_1(0) = 1\,, \qquad \Phi_1'(0) = 0\,. \tag{11}$$

$$\Phi_3(0) = 0\,, \qquad \Phi_3'(0) = 0\,. \tag{12}$$

Hieraus folgt für Φ_1

$$\Phi_1 = e^{-\delta\,\vartheta}\left(\cos\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\sin\gamma\,\vartheta\right) \tag{13}$$

mit

$$\gamma = \sqrt{1-\delta^2}\,. \tag{14}$$

Einsetzen von (13) in (10) ergibt für Φ_3 die neue Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} e^{3\,\delta\,\vartheta}\,(\Phi_3'' + 2\,\delta\,\Phi_3' + \Phi_3) = \left(\frac{1}{8\,\gamma^2} - 4\,c\,\delta\right)\cos\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{1}{8\,\gamma^2} + 4\,c\,\delta\right)\sin\gamma\,\vartheta + \\ + \frac{1-4\,\delta^2}{24\,\gamma^2}\cos 3\,\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\,\frac{3-4\,\delta^2}{24\,\gamma^2}\sin 3\,\gamma\,\vartheta\,. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Damit unsere Lösung auch für $\delta = 0$ gültig bleibt, muß der Koeffizient von $\cos\gamma\,\vartheta$ verschwinden, d. h., es muß sein

$$c = \frac{1}{32\,\delta\,\gamma^2}\,. \tag{16}$$

Gleichung (15) reduziert sich nun auf

$$\Phi_3'' + 2\,\delta\,\Phi_3' + \Phi_3 = e^{-3\,\delta\,\vartheta}\left(\frac{\delta}{4\,\gamma^3}\sin\gamma\,\vartheta + \frac{1-4\,\delta^2}{24\,\gamma^2}\cos 3\,\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\,\frac{3-4\,\delta^2}{24\,\gamma^2}\sin 3\,\gamma\,\vartheta\right). \tag{17}$$

Ihr allgemeines Integral lautet bei Beachtung der Anfangsbedingungen (12)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_3 = e^{-\delta\,\vartheta}\left[-\frac{11+\delta^2-12\,\delta^4}{48\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\cos\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\,\frac{47-74\,\delta^2+24\,\delta^4}{96\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\sin\gamma\,\vartheta\right] + \frac{1}{16\,\gamma^2}\,e^{-3\,\delta\,\vartheta}\left(\cos\gamma\,\vartheta + \right. \\ \left. + \frac{\delta}{\gamma}\sin\gamma\,\vartheta\right) - e^{-3\,\delta\,\vartheta}\left[\frac{1-10\,\delta^2+12\,\delta^4}{48\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\cos 3\,\gamma\,\vartheta + \frac{\delta}{\gamma}\,\frac{9-32\,\delta^2+24\,\delta^4}{96\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\sin 3\,\gamma\,\vartheta\right]. \end{aligned}\right| \tag{18}$$

Mit (13) und (18) bekommen wir als Lösung unserer Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} \varphi = (A_{11}\,e^{-\delta\,\vartheta} + A_{13}\,e^{-3\,\delta\,\vartheta})\cos\gamma\,\vartheta + A_{33}\,e^{-3\,\delta\,\vartheta}\cos 3\,\gamma\,\vartheta + \\ + (B_{11}\,e^{-\delta\,\vartheta} + B_{13}\,e^{-3\,\delta\,\vartheta})\sin\gamma\,\vartheta + B_{33}\,e^{-3\,\delta\,\vartheta}\sin 3\,\gamma\,\vartheta\,, \end{aligned}\right| \tag{19}$$

wo

$$A_{11} = \alpha - \frac{11+\delta^2-12\,\delta^4}{48\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\,\alpha^3, \qquad B_{11} = \frac{\delta}{\gamma}\,\alpha + \frac{47\,\delta-74\,\delta^3+24\,\delta^5}{96\,\gamma^3(4-3\,\delta^2)}\,\alpha^3\,,$$

$$A_{13} = \frac{1}{16\,\gamma^2}\,\alpha^3\,, \qquad B_{13} = \frac{\delta}{16\,\gamma^3}\,\alpha^3\,,$$

$$A_{33} = -\frac{1-10\,\delta^2+12\,\delta^4}{48\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\,\alpha^3\,, \qquad B_{33} = -\frac{9\,\delta-32\,\delta^3+24\,\delta^5}{96\,\gamma^3(4-3\,\delta^2)}\,\alpha^3$$

ist und ϑ durch die Gleichung

$$\tau = \vartheta + \frac{\alpha^2}{32\,\delta\,\gamma^2}\,(1-e^{-2\,\delta\,\vartheta}) \tag{6a}$$

bestimmt wird.

Der erste Umkehrpunkt werde erreicht für $\vartheta = \Theta_1$, und zwar ist dann

$$\varphi'(\Theta_1) = \alpha\,\Phi_1'(\Theta_1) + \alpha^3\,\Phi_3'(\Theta_1) = 0\,.$$

Setzen wir nun

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{\gamma} + \varepsilon\,,$$

so folgt, da ε als sehr klein angesehen werden kann,

$$\Phi_1'(\Theta_1) = \varepsilon\,\Phi_1''\left(\frac{\pi}{\gamma}\right), \qquad \alpha^2\Phi_3'(\Theta_1) = \alpha^2\Phi_3'\left(\frac{\pi}{\gamma}\right),$$

also

$$\varepsilon = -\,\alpha^2\,\frac{\Phi_3'\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)}{\Phi_1''\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)}.$$

Die Ausrechnung der hier auftretenden Ableitungen von Φ_1 und Φ_3 führt schließlich zu

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{\gamma} + \alpha^2\,\frac{23\,\delta - 24\,\delta^3}{32\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\left(1 - e^{-2\pi\frac{\delta}{\gamma}}\right), \tag{20}$$

und damit bestimmt sich nach (6a) die Dauer der ersten Halbschwingung durch die Formel

$$T_1 = \frac{1}{n}\left[\Theta_1 + \frac{\alpha^2}{32\,\delta\,\gamma^2}\left(1 - e^{-2\,\delta\,\Theta_1}\right)\right]. \tag{21}$$

Die Amplitude im ersten Umkehrpunkt ist mit ausreichender Genauigkeit

$$\varphi_1 = \varphi(\Theta_1) = \alpha\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) + \alpha^3\,\Phi_3\left(\frac{\pi}{\gamma}\right). \tag{22}$$

Entsprechend besteht die Beziehung

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) + \varphi_k^3\,\Phi_3\left(\frac{\pi}{\gamma}\right), \tag{23}$$

wenn φ_k die Amplitude im k-ten Umkehrpunkt bezeichnet. Hieraus folgt das allgemeine Amplitudengesetz

$$\left|\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\right| = e^{-\pi\frac{\delta}{\gamma}}\left[1 - \varphi_k^2\,\frac{11+\delta^2-12\,\delta^4}{48\,\gamma^2(4-3\,\delta^2)}\left(1 - e^{-2\pi\frac{\delta}{\gamma}}\right)\right]. \tag{24}$$

Nachdem φ_1 bekannt ist, ergibt sich aus (20) und (21), wenn auf den rechten Seiten α mit φ_1 vertauscht wird, $\Theta_2 - \Theta_1$ bzw. T_2. Auf diese Weise können nacheinander die φ_k und T_k berechnet werden.

Zum Schluß sei gezeigt, daß diese Ergebnisse auch die bekannten Grenzfälle enthalten. Für $\delta \to 0$ geht (20) über in $\Theta_1 = \pi$, und damit ergibt (21)

$$T_1 = T = \frac{\pi}{n}\left(1 + \frac{1}{16}\,\alpha^2\right),$$

also die Schwingungsdauer für ein ungedämpftes Pendel endlicher Amplitude in zweiter Näherung. Auch der für φ gefundene Ausdruck (19) erhält dann die gewünschte Gestalt

$$\varphi = \left(\alpha + \frac{1}{192}\,\alpha^3\right)\cos\vartheta - \frac{1}{192}\,\alpha^3\cos 3\,\vartheta$$

mit

$$\vartheta = \frac{n\,t}{1 + \frac{1}{16}\,\alpha^2}.$$

Für $\alpha \ll 1$ kann der zweite Term in (20) und (21) vernachlässigt werden; die Formel für die Schwingungsdauer nimmt daher wegen (4) die einfache Gestalt an

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

Entsprechend reduzieren sich für kleine α das Amplitudengesetz (24) und die Bewegungsgleichung (19) auf die bekannten Formeln aus der Theorie der kleinen gedämpften Schwingungen.

(Eingegangen am 27. September 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Friedrich Karl Rubbert*, (17b) Oberglottertal über Freiburg i. Br., Lautackerhof

Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes unter Berücksichtigung der Materialverfestigung.

Von W. Swida.

1. Einleitung. In einer unserer früheren Arbeiten[1] haben wir die elastisch-plastische Biegung eines krummen Stabes unter Zugrundelegung eines idealisierten Spannungs-Dehnungs-Diagrammes mit einem langen horizontalen Fließteil betrachtet (Abb. 1).

Bekanntlich hat aber die Spannungs-Dehnungs-Linie für viele Werkstoffe keinen horizontalen Fließteil. Das bezieht sich insbesondere auf einige Stahlsorten, Bronze, Aluminiumlegierungen. Die drei in der Abb. 2 angegebenen Kurven stellen die normalen Spannungs-Dehnungs-Linien für Manganstahl (*a*), Nickelstahl (*c*) und Bronze (*b*) dar.

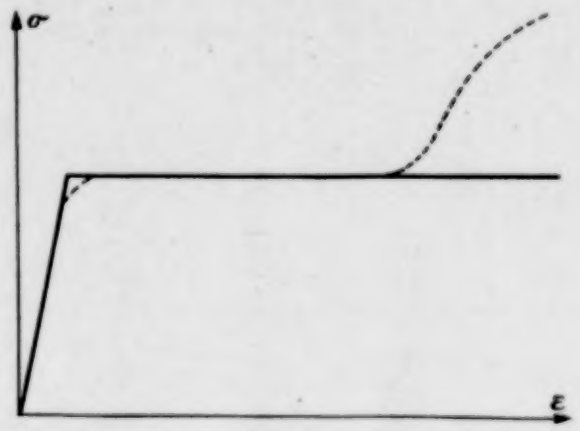


Abb. 1.

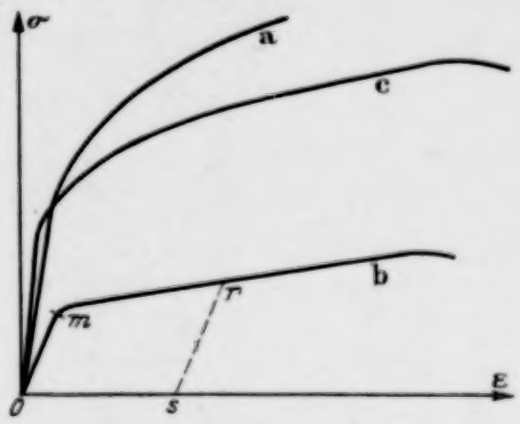


Abb. 2.

Für die Untersuchung der Spannungsverteilung bei der Biegung der Stäbe aus solchen Werkstoffen kann man zwecks Vereinfachung der Berechnung ein idealisiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb. 3) annehmen.

Es wird angenommen, daß $Om = Op$ und mn parallel pq ist. Dann können die Zusammenhänge zwischen Spannungen und Dehnungen bei Zug und Druck als identisch betrachtet werden. Man ersieht aus Abb. 3, daß $\operatorname{tg}\alpha = E$ und $\operatorname{tg}\alpha_1 = E_1$ ist. Dabei ist E_1 der Elastizitätsmodul für diejenigen Spannungen, welche die Spannung σ_s übersteigen. Diese entspricht den Knickpunkten der Spannungs-Dehnungs-Linie[2]. Auf diese Weise wird als Ersatzstoff ein idealisierter Stoff mit einer Kennlinie nach Abb. 3 angenommen.

Da die Entlastungslinie rs (Abb. 2 und 3) immer als parallel der ursprünglichen Belastungslinie om angenommen werden kann, ist der Abschnitt os die bleibende (plastische) Formänderung, und der ganze Vorgang kann als elastisch-plastisch bezeichnet werden.

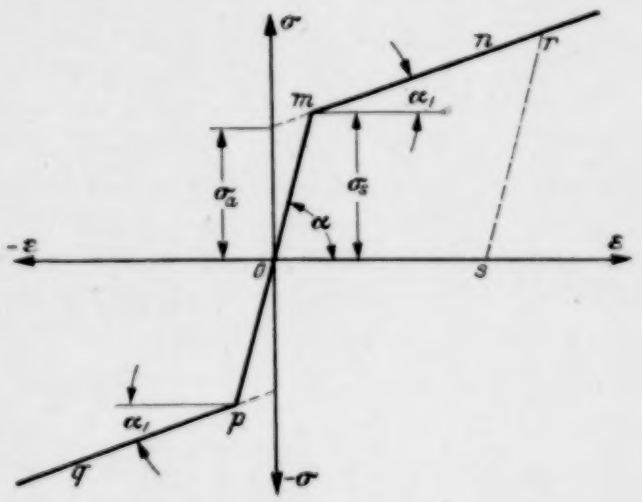


Abb. 3.

Die Berücksichtigung der Spannungen, die σ_s überschreiten, führt, wie gezeigt wird, zur richtigen Beurteilung der Tragfähigkeit des Stabes und kann Materialeinsparungen bei der Bemessung bringen.

Die Gleichungen der Geraden pm, mn und qp sind

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma = \sigma_s + E_1\varepsilon, \quad \sigma = -\sigma_s + E_1\varepsilon. \tag{1}$$

[1] *W. Swida*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 364.

[2] Die Untersuchung eines geraden Stabes unter Zugrundelegung einer ähnlichen Spannungs-Dehnungslinie wurde von *A. Nádai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe, S. 121, Berlin 1927, durchgeführt.

Wir nehmen ferner an, daß die Biegungsmomente in der Krümmungsebene wirken, daß eine der Symmetrieachse eines beliebigen Querschnittes ebenfalls in dieser Ebene liegt und betrachten den Fall der reinen Biegung. Dabei wird vorausgesetzt, daß man die seitliche Pressung zwischen den Längsfasern außer acht lassen kann und daß die Querschnitte nach der Biegung eben bleiben.

Auf Grund dieser letzten Voraussetzungen ergibt sich für die relative Dehnung ε in einer beliebigen Faser (Abb. 4) derselbe Ausdruck wie bei der elastischen Biegung:

$$\varepsilon = \frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\,, \tag{2}$$

worin r der Krümmungsradius der neutralen Fläche ist.

Die Spannungen bei der konkaven Oberfläche sind in der Regel größer als bei der konvexen Oberfläche. Deshalb werden zwei Spannungszustände unterschieden:

1. Die plastische Zone (Bereich der Spannungen, die σ_s überschreiten) entsteht nur auf einer Seite der Nullinie, und zwar an der konkaven Oberfläche.
2. Die plastischen Zonen treten beiderseits der Nullinie auf.

2. Erster Spannungszustand. Auf Grund von (1) und (2) ergeben sich folgende Werte für die Spannungen σ bzw. σ_u in der elastischen bzw. in der plastischen Zone:

$$\sigma = \frac{E\,\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\,, \tag{3}$$

$$\sigma_u = -\sigma_a + \frac{E_1\,\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\,. \tag{4}$$

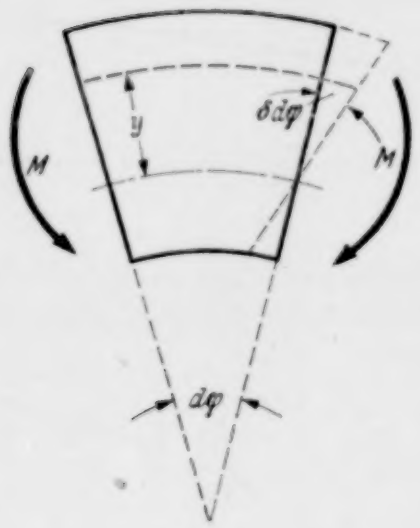


Abb. 4.

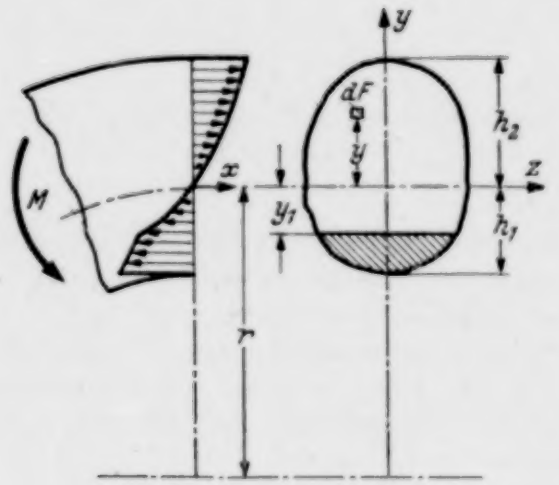


Abb. 5.

Ist $y = -y_1$ (Abb. 5), so wird jede von diesen Spannungen der absoluten Größen nach gleich σ_s sein. Also ist

$$\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi} = \frac{\sigma_s(r-y_1)}{E\,y_1} = \frac{(\sigma_s-\sigma_a)(r-y_1)}{E_1\,y_1}\,. \tag{5}$$

Aus (5) folgt

$$\frac{\sigma_s-\sigma_a}{\sigma_s} = \frac{E_1}{E}\,. \tag{6}$$

Man kann auch das letzte Ergebnis unmittelbar aus Abb. 3 erhalten.

Bildet man die Summe der Projektionen sämtlicher auf das Element des gekrümmten Stabes wirkenden Kräfte auf die Richtung der x-Achse (Abb. 5), so erhält man

$$\int\limits_{(F_e)} \frac{E\,\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_u)} \left(-\sigma_a + \frac{E_1\,\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\right) dF = 0\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi} = \frac{\sigma_a F_u}{E\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} + E_1 \int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y}}\,. \tag{7}$$

Dabei ist F_e der Flächeninhalt des Querschnittes des elastischen Bereiches; F_u ist derselbe für den plastischen Bereich.

Das resultierende Kräftepaar der über den Querschnitt verteilten Spannungen muß mit dem äußeren Kräftepaar M im Gleichgewicht stehen. Daher ist

$$M = \int_{(F_e)} \frac{E\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2 dF}{r+y} + \int_{(F_u)} \left(-\sigma_a y + \frac{E_1\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2}{r+y}\right) dF = \frac{E\delta\, d\varphi}{d\varphi}\int_{(F_e)} y\, dF +$$

$$+ \left(\frac{E_1\delta\, d\varphi}{d\varphi} - \sigma_a\right)\int_{(F_u)} y\, dF - \frac{r\delta\, d\varphi}{d\varphi}\left(E\int_{(F_e)}\frac{y\, dF}{r+y} + E_1\int_{(F_u)}\frac{y\, dF}{r+y}\right).$$

Die ersten zwei der erhaltenen Integrale stellen die statischen Momente der Querschnittsflächen des elastischen und plastischen Bereiches in bezug auf die Nullinie dar. Man bezeichnet sie mit S_e und S_u. Mit Hilfe von (7) findet man aus der letzten Gleichung, daß

$$\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi} = \frac{M+\sigma_a(S_u+F_u r)}{E S_e + E_1 S_u} \tag{8}$$

ist.

Man kann nun die Gleichungen (7) und (8) auf Grund von (15) folgendermaßen umformen:

$$\frac{\sigma_a F_u}{E\int_{(F_e)}\frac{y\, dF}{r+y} + E_1\int_{(F_u)}\frac{y\, dF}{r+y}} = \frac{\sigma_s(r-y_1)}{E y_1}, \tag{9}$$

$$\frac{M+\sigma_a(S_u+F_u r)}{E S_e + E_1 S_u} = \frac{\sigma_s(r-y_1)}{E y_1}. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) kann man die Werte von r und y_1 ermitteln und auf diese Weise die Lage der neutralen Achse und der Grenzen zwischen der elastischen und der plastischen Zone bestimmen.

Setzt man $\delta\, d\varphi/d\varphi$ aus (8) in (3) und (4) ein, so ergeben sich folgende endgültige Formeln für die Spannungen im ersten Spannungszustand:

$$\sigma = \frac{M+\sigma_a(S_u+F_u r)}{S_e+\xi S_u}\,\frac{y}{r+y}, \tag{11}$$

$$\sigma_u = -\sigma_a + \frac{\xi\,[M+\sigma_a(S_u+F_u r)]}{S_e+\xi S_u}\,\frac{y}{r+y}, \tag{12}$$

worin $\xi = \dfrac{E_1}{E}$ ist.

Setzt man in (10) $S_u = 0$, $F_u = 0$ und $y_1 = h_1$ ein, so ergibt sich der Wert des Biegungsmomentes, der dem Entstehen der Spannungen σ_s in den äußersten unteren Fasern entspricht:

$$M = S\,\sigma_s\,\frac{r-h_1}{h_1}. \tag{13}$$

wobei S das statische Moment des ganzen Querschnittes in bezug auf die Nullinie ist. In diesem Fall ist r nach den bekannten Formeln für die elastische Biegung zu bestimmen.

Setzt man in (11) $y = h_2$ und $\sigma = \sigma_s$ ein, und ermittelt man M, so erhält man folgenden Wert des Biegungsmomentes, der das Entstehen der Spannungen σ_s in den äußersten oberen Fasern bedingt:

$$M = \sigma_s\,(S_e + \xi\, S_u)\,\frac{r+h_2}{h_2} - \sigma_a\,(S_u + F_u\, r). \tag{14}$$

Die Gleichungen (14), (9) und (10) sind nach M, r und y_1 aufzulösen.

3. Zweiter Spannungszustand. Die Spannungen in der elastischen bzw. der unteren plastischen Zone können ebenso wie im ersten Zustand durch die Formeln (3) bzw. (4) ausgedrückt werden. In der oberen plastischen Zone (Abb. 6) werden die Spannungen

$$\sigma_0 = \sigma_a + \frac{E_1\delta\, d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}. \tag{15}$$

An der unteren und oberen Grenze zwischen der elastischen und den plastischen Zonen müssen die Spannungen der absoluten Größe nach gleich sein. Folglich ist

$$\frac{y_1}{r-y_1} = \frac{y_2}{r+y_2}, \tag{16}$$

$$r = \frac{2\,y_1 y_2}{y_2 - y_1}. \tag{16'}$$

Bildet man die Summe der Projektionen sämtlicher auf das Element des gekrümmten Stabes (Abb. 6) wirkender Kräfte auf die Richtung der x-Achse, so ergibt sich

$$\int\limits_{(F_e)} \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_u)} \left(-\sigma_a + \frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\right) dF + \int\limits_{(F_0)} \left(\sigma_a + \frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\right) dF = 0\,,$$

wobei F_0 die Querschnittsfläche der oberen plastischen Zone ist. Daraus folgt

$$\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{\sigma_a (F_u - F_0)}{E\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} + E_1\left(\int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_0)} \frac{y\,dF}{r+y}\right)}\,. \tag{17}$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung erhält die Form

$$\left.\begin{aligned} M = &\int\limits_{(F_e)} \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_u)} \left(-\sigma_a\,y + \frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2}{r+y}\right) dF + \int\limits_{(F_0)} \left(\sigma_a\,y + \frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2}{r+y}\right) dF \\ = &\frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\int\limits_{(F_e)} y\,dF + \left(\frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi} - \sigma_a\right)\int\limits_{(F_u)} y\,dF + \left(\frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi} + \sigma_a\right)\int\limits_{(F_0)} y\,dF - \\ &- \frac{r\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left[E\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} + E_1\left(\int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_0)} \frac{y\,dF}{r+y}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die ersten drei der erhaltenen Integrale stellen die statischen Momente der elastischen und plastischen Zonen in bezug auf die neutrale Achse dar. Man bezeichnet sie mit S_e, S_u und S_0. Auf Grund von (17) ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{M + \sigma_a\,[(F_u - F_0)\,r + S_u - S_0]}{E\,S_e + E_1\,(S_u + S_0)}\,. \tag{19}$$

Die Gleichungen (17) und (19) lassen sich mit Hilfe von (5) folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\sigma_a (F_u - F_0)}{E\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} + E_1\left(\int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_0)} \frac{y\,dF}{r+y}\right)} = \frac{\sigma_s (r - y_1)}{E\,y_1}\,, \tag{20}$$

$$\frac{M + \sigma_a\,[(F_u - F_0)\,r + S_u - S_0]}{E\,S_e + E_1\,(S_u + S_0)} = \frac{\sigma_s (r - y_1)}{E\,y_1}\,. \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (20), (21) und (16′) können y_1, y_2 und r ermittelt werden. Setzt man in (3), (4) und (15) den Wert von $\delta d\varphi/d\varphi$ aus (19) ein, so erhält man die endgültigen Formeln für die Spannungen im zweiten Spannungszustand:

$$\sigma = \frac{M + \sigma_a\,[(F_u - F_0)\,r + S_u - S_0]}{S_e + \xi\,(S_u + S_0)}\,\frac{y}{r+y}\,, \tag{22}$$

$$\sigma_{u0} = \mp\,\sigma_a + \frac{\xi\,\{M + \sigma_a\,[(F_u - F_0)\,r + S_u - S_0]\}}{S_e + \xi\,(S_u + S_0)}\,\frac{y}{r+y}\,. \tag{23 und 24}$$

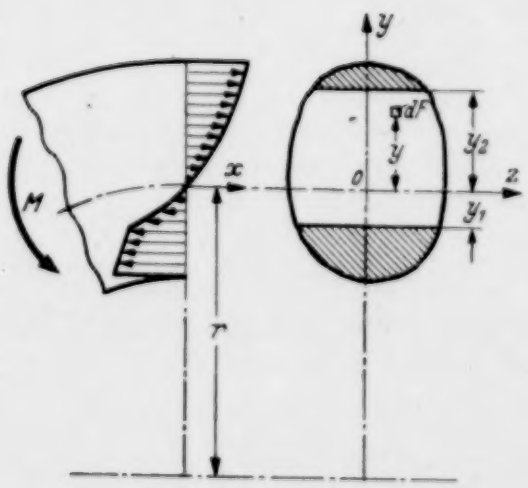


Abb. 6.

Nimmt man in (9), (10), (20) und (21) an, daß $E_1 = 0$ ist, und ersetzt man σ_a durch σ_s, so ergeben sich die früher[1] gefundenen Zusammenhänge für die Biegung des gekrümmten Stabes aus einem idealplastischen Werkstoff:

$$\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} = \frac{F_u\,y_1}{r - y_1}\,, \tag{9′}$$

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{S_e\,(r - y_1)}{y_1} + F_u\,(k_u - r)\,, \tag{10′}$$

$$\int\limits_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} = \frac{y_1}{r - y_1}\,(F_u - F_0)\,, \tag{20′}$$

$$\frac{M}{\sigma_s} = S_e\,\frac{r - y_1}{y_1} + F_u\,(k_u - r) + F_0\,(k_0 + r)\,. \tag{21′}$$

[1] Ing.-Archiv 16 (1948), S. 364.

Setzt man in (22), (23) oder in (24) $\sigma_a = 0$ und $\xi = 1$, so ergibt sich der bekannte Ausdruck für die Spannungen bei der elastischen Biegung:

$$\sigma = \frac{M}{S} \frac{y}{r+y} .$$

Wir ermitteln jetzt das Grenzmoment, d. h. dasjenige Moment, bei dessen Wirkung die maximalen Spannungen im Material eine gewisse Grenze erreichen. Darunter verstehen wir entweder eine Bruchspannung oder eine solche Spannung, bei deren Wirkung die relativen Dehnungen in den äußersten Fasern einen gewissen gegebenen Grenzwert erreichen. Wir bezeichnen diese Grenzspannung mit σ_m.

Setzt man in (23) $\sigma_u = -\sigma_m$ und $y = -h_1$, so findet man das Grenzmoment

$$M_s = \sigma_a \left[S_0 - S_u + r\,(F_0 - F_u)\right] + \frac{r-h_1}{h_1}(\sigma_m - \sigma_a)\left(\frac{S_e}{\xi} + S_u + S_0\right). \tag{25}$$

Die letzte Gleichung ist mit (20), (21) und (16′) nach y_1, r, y_2 und M aufzulösen.

Für Werkstoffe, die einen kleinen Elastizitätsmodul E_1 haben, kann in einer Reihe von Fällen die Bestimmung des Grenzmomentes vereinfacht werden.

Tatsächlich muß sich bei der Zunahme des Biegungsmomentes die Höhe der elastischen Zone verringern, und diese Verringerung muß (bei gleichen Werten der Momente) für ein Material mit kleinem Elastizitätsmodul E_1 größer sein als für ein Material mit großem E_1.

Bevor nun die Spannung den Wert σ_m erreicht, kann sich auf diese Weise der Einfluß der elastischen Zone praktisch als derart unbedeutend erweisen (insbesondere, wenn σ_m erheblich σ_s und σ_a übersteigt), daß man ihn außer acht lassen kann. Dann können die Gleichgewichtsgleichungen (17) und (18) näherungsweise folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{\sigma_a(F_u - F_0)}{\int\limits_{(F)} \frac{y\,dF}{r+y}}, \tag{26}$$

$$M = \sigma_a\,(S_0 - S_u) + \frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left(S_0 + S_u - r\int\limits_{(F)} \frac{y\,dF}{r+y}\right), \tag{27}$$

wobei F die ganze Querschnittsfläche ist. Setzt man in (4) $\sigma_u = \sigma_m$ und $y = -h_1$, so erhält man

$$\frac{E_1\,\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{r-h_1}{h_1}(\sigma_m - \sigma_a) . \tag{28}$$

Auf Grund von (28) ergibt sich aus (26) und (27)

$$\int\limits_{(F)} \frac{y\,dF}{r+y} = \frac{\sigma_a h_1 (F_u - F_0)}{(\sigma_m - \sigma_a)(r-h_1)}, \tag{26′}$$

$$M_s = \sigma_a\left[S_0 - S_u + r\,(F_0 - F_u)\right] + \frac{r-h_1}{h_1}(\sigma_m - \sigma_a)\,(S_u + S_0) . \tag{27′}$$

Aus (26′) kann der Wert von h_1 bzw. r ermittelt werden. M_s ergibt sich ohne weiteres dann aus (27′). Setzt man in (18) und (17) $E_1 = 0$ und $\sigma_a = \sigma_s$ ein, so erhält man M_s für einen Stab aus einem idealplastischen Werkstoff

$$M_s = \sigma_s(S_0 - S_u) ,$$

wobei S_0 und S_u mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind. Dabei ist $F_0 = F_u$. Für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt ist

$$M_s = \frac{b\,h^2}{4}\,\sigma_s .$$

Nun lassen wir für den Fall, daß $E > E_1$ ist, die Möglichkeit eines weiteren Anwachsens der Momente und der Formänderungen bis zum vollständigen Verschwinden der elastischen Zone zu. Aus (5), (16) und (20) ersehen wir, daß

$$\lim_{\substack{(y_1\to 0)\\(y_2\to 0)}} \frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \infty , \qquad \lim_{(y_1\to 0)}\left(\int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} + \int\limits_{(F_0)} \frac{y\,dF}{r+y}\right) = \lim_{(y_1\to 0)} \int\limits_{(F)} \frac{y\,dF}{r+y} = 0 , \tag{29}$$

weil $F_u - F_0 \neq 0$ ist. Dann ist auf Grund von (18):

$$\lim M = \infty , \qquad \text{wenn } \frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} \longrightarrow \infty . \tag{30}$$

Die Gleichung (29) zeigt, daß, wenn das vollständige Verschwinden der elastischen Zone möglich wäre, die Grenze der plastischen Zonen des Querschnittes mit der neutralen Achse des ge-

krümmten Stabes bei der elastischen Biegung zusammenfallen müßte. Aus (30) sieht man, daß für das vollständige Verschwinden der elastischen Zone ein unendlich großes Moment erforderlich wäre. Man muß auch berücksichtigen, daß bei großen Deformationen die von uns zugrunde gelegten Annahmen (Ebenbleiben der Stabquerschnitte, Nichtvorhandensein seitlicher Pressungen zwischen Längsfasern, Unveränderlichkeit der Querschnittsform bei Biegung usw.) in gewissem Sinne nicht mehr der Wirklichkeit entsprechen.

Unter Verwendung des von uns früher angegebenen Verfahrens[1] und der Formeln (8) und (19) erhalten wir folgenden allgemeinen Ausdruck für die waagerechte Verschiebung f_h eines beliebigen Punktes A des krummen Stabes infolge der Formänderung des ganzen Teiles OA (Abb. 7):

$$\left.\begin{aligned} f_h = {} & \sum \int_{(s_i)} \frac{M(y_0-y)\,ds}{EQS} + \sum \int_{(s_k)} \frac{[M+\sigma_a(S_u+F_u r)](y_0-y)\,ds}{EQ(S_e+\xi S_u)} + \\ & + \sum \int_{(s_k')} \frac{\{M+\sigma_a[(F_u-F_0)r+S_u-S_0]\}(y_0-y)\,ds}{EQ[S_e+\xi(S_u+S_0)]}, \end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

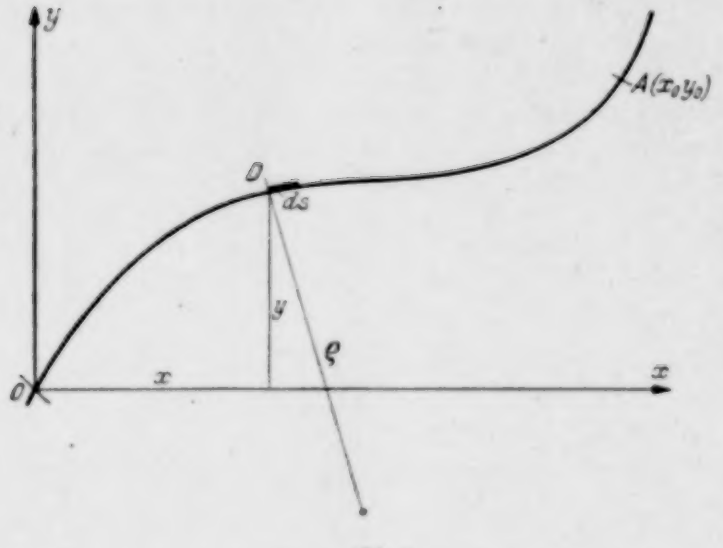


Abb. 7.

wobei s_i die Länge eines elastisch deformierten Abschnittes des Stabes, s_k die Länge eines elastischplastisch deformierten Stababschnittes mit einseitiger plastischer Zone (an der konkaven Fläche) und s_k' die Abschnittslänge mit beiderseitiger plastischer Zone sind. In Abb. 7 sind x und y die Koordinaten des Gleitpunktes D.

Ersetzt man in (30') y_0-y durch x_0-x, so erhält man den Ausdruck für die vertikale Verschiebung des Punktes A. Endlich, wenn man in (30') y_0-y durch 1 ersetzt, so ergibt sich der Drehwinkel des Querschnittes A.

Nun wenden wir die obigen allgemeinen Zusammenhänge auf den Fall eines gekrümmten Stabes mit rechteckigem Querschnitt an.

4. Rechteckiger Querschnitt. a) Erster Spannungszustand. Auf Grund der Abb. 8 erhalten wir:

$$F_u = b(r-y_1-a), \qquad r = c-y_2,$$

$$S_e = \frac{b}{2}(y_2^2-y_1^2), \qquad S_u = -\frac{b}{2}\left[(r-a)^2-y_1^2\right],$$

$$\int_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} = \int_{u_1}^{c} \frac{(u-r)b\,du}{u} = b\left(y_1+y_2-r\ln\frac{c}{r-y_1}\right),$$

$$\int_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} = \int_{a}^{u_1} \frac{(u-r)b\,du}{u} = b\left(c-a-y_1-y_2-r\ln\frac{r-y_1}{a}\right).$$

Unter Benützung von (6) kann man die Gleichgewichtsgleichungen (9) und (10) folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_s\left[h-(c-y_2)\ln\frac{c}{a}\right]-\sigma_a\left[h-y_1-y_2-(c-y_2)\ln\frac{c-y_1-y_2}{a}\right] = \sigma_a y_1\left(1-\frac{a}{c-y_1-y_2}\right). \tag{31}$$

$$M+\frac{\sigma_a b}{2}\left[(c-y_1-y_2)^2-a^2\right] = \frac{\sigma_s b(c-y_1-y_2)}{2Ey_1}\left\{E(y_2^2-y_1^2)-E_1\left[(h-y_2)^2-y_1^2\right]\right\}. \tag{32}$$

Die Lösung der erhaltenen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten kann durch die Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten ersetzt werden, wenn man die Substitution

$$y_1 = \frac{v-t}{2}, \qquad y_2 = \frac{v+t}{2} \tag{33}$$

[1] Ing.-Archiv 16 (1948), S. 367.

anwendet. Dabei sind v und t die neuen Unbekannten. Dann ergibt sich aus (32) nach einigen Umformungen

$$t = \frac{v(A+Bv+\sigma_a b v^2)+Dch}{K-v(D+\sigma_a b v)}, \tag{34}$$

wobei

$$D=2bh(\sigma_s-\sigma_a), \qquad B=D-2\sigma_a bc,$$
$$K=2M+bh(2\sigma_s c-\sigma_a h), \qquad A=2M+\sigma_a b(c^2-a^2)-D(h+c)$$

ist.

Auf Grund von (33) und (34) kann man die Gleichung (31) folgendermaßen darstellen:

$$\frac{2(\eta-1)h+(2c-v)\left(\ln\frac{c-v}{a}-\eta\ln\frac{c}{a}\right)+v\left(2-\frac{h-v}{c-v}\right)}{\ln\frac{c-v}{a}-\frac{h-v}{c-v}-\eta\ln\frac{c}{a}} = \frac{v(A+Bv+\sigma_a b v^2)+Dch}{K-v(D+\sigma_a b v)}, \tag{35}$$

wobei $\eta=\sigma_s/\sigma_a$ ist. Nach Ermittlung von v aus (35) lassen sich t, y_1 und y_2 mit Hilfe von (34) und (33) errechnen. Danach können die Spannungen aus (11) und (12) gefunden werden.

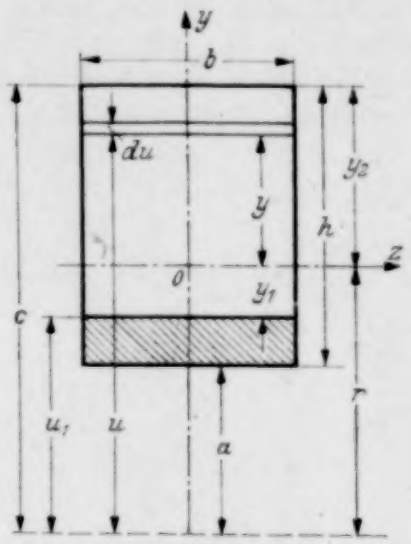


Abb. 8.

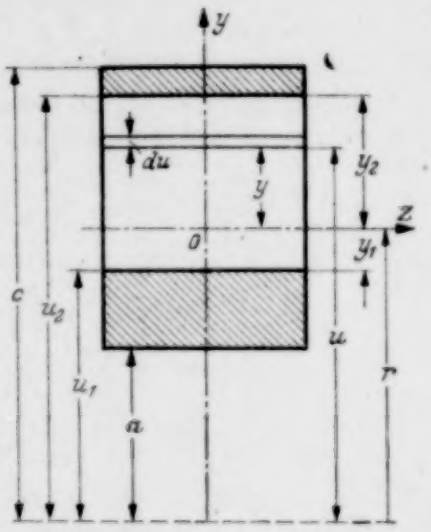


Abb. 9.

Zur Bestimmung des Wertes von v kann man $\ln\frac{c-v}{a}$ in (35) durch folgende, schnell konvergierende Reihe

$$\ln\frac{c-v}{a}=\ln\frac{c}{a}-\frac{v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}-\frac{v^3}{3c^3}-\dots.$$

ersetzen.

Für den krummen Stab aus einem idealplastischen Werkstoff ist $\sigma_a=\sigma_s$, und die Gleichungen (34) und (35) erhalten folgende Form[1]:

$$t=\frac{v[A'+b(c-v)^2]}{A'+b(c^2-v^2)}, \tag{34'}$$

$$\ln\frac{c}{c-v}=\frac{v}{c-v}\left(1-\frac{bhv}{A'+bc^2}\right), \tag{35'}$$

wobei

$$A'=\frac{2M}{\sigma_s}-ba^2.$$

ist.

b) Zweiter Spannungszustand. In diesem Falle (Abb. 9) wird

$$F_0=b(c-r-y_2), \qquad S_0=\frac{b}{2}\left[(c-r)^2-y_2^2\right], \qquad r=\frac{2y_1y_2}{y_2-y_1},$$

$$\int\limits_{(F_e)}\frac{y\,dF}{r+y}=\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{(u-r)b\,du}{u}=b\left(y_1+y_2-r\ln\frac{y_2}{y_1}\right),$$

[1] Ing.-Archiv 16 (1948), S. 369.

$$\int\limits_{(F_u)} \frac{y\,dF}{r+y} = \int\limits_{a}^{u_1} \frac{(u-r)\,b\,du}{u} = b\left(r - y_1 - a - r\ln\frac{r-y_1}{a}\right),$$

$$\int\limits_{(F_0)} \frac{y\,dF}{r+y} = \int\limits_{u_2}^{c} \frac{(u-r)\,b\,du}{u} = b\left(c - r - y_2 - r\ln\frac{c}{r+y_2}\right).$$

Die Werte von F_u und S_u sind dieselben wie im ersten Spannungszustand.

Mit Hilfe von (6) und (16′) lassen sich die Gleichgewichtsgleichungen (20) und (21) folgendermaßen darstellen:

$$\frac{y_2+y_1}{y_2-y_1}\left[\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_a}-1\right)\left(h-\frac{2\,y_1\,y_2}{y_2-y_1}\ln\frac{c}{a}\right)+y_1+y_2-\frac{2\,y_1\,y_2}{y_2-y_1}\ln\frac{y_2}{y_1}\right] = \frac{(y_2+y_1)^2}{y_2-y_1} - c - a\,, \tag{36}$$

$$M-\frac{\sigma_a b}{2}(a^2+c^2)+\frac{b(y_2+y_1)}{2(y_2-y_1)}\left\{\frac{2\,y_1\,y_2}{y_2-y_1}\left[\sigma_a(y_2+y_1)-2(a-c)(\sigma_s-\sigma_a)\right]-(\sigma_s-\sigma_a)(c^2-a^2)\right\}=0\,. \tag{37}$$

Wir verwenden die Substitution

$$y_1 = t\sqrt{\frac{v-1}{v+1}}\,, \qquad y_2 = t\sqrt{\frac{v+1}{v-1}}\,, \tag{38}$$

wobei t und v die neuen Unbekannten sind. (Die Substitution von (33) führt hier nicht zu erwünschten Ergebnissen.) Es ergibt sich dann aus (36) nach einigen Umformungen

$$t = \frac{h(1+\lambda v)+2a}{v\sqrt{v^2-1}\left(\ln\frac{v+1}{v-1}+\lambda\ln\frac{c}{a}\right)}\,, \tag{39}$$

wobei $\lambda=\sigma_s/\sigma_a-1$ ist. Die Gleichung (37) erhält auf Grund von (38) und (39) folgende Form:

$$\alpha-\beta v-\frac{\gamma[h(1+\lambda v)+2a]}{\ln\frac{v+1}{v-1}+\lambda\ln\frac{a}{c}}+\frac{2\sigma_a b[h(1+\lambda v)+2a]^2}{(v^2-1)\left(\ln\frac{v+1}{v-1}+\lambda\ln\frac{c}{a}\right)^2}=0\,, \tag{40}$$

wobei

$$\alpha = 2M-\sigma_a b(a^2+c^2)\,, \qquad \beta = b(c^2-a^2)(\sigma_s-\sigma_a)\,, \qquad \gamma = 2b(a-c)(\sigma_s-\sigma_a)$$

ist. Diese Gleichung liefert den Wert von v.

Die Werte von t, y_1, y_2, r und die Spannungswerte können der Reihe nach aus (39), (38), (16′), (22), (23) und (24) ermittelt werden.

Wenn für das Stabmaterial $\sigma_a=\sigma_s$ ist, so vereinfachen sich die Gleichungen (39) und (40) wesentlich:

$$t = \frac{c+a}{v\sqrt{v^2-1}\ln\frac{v+1}{v-1}}\,, \tag{39′}$$

$$(v^2-1)\left(\ln\frac{v+1}{v-1}\right)^2+\frac{2\sigma_s b(c+a)^2}{2M-\sigma_s b(c^2+a^2)}\,. \tag{40′}$$

Für den Fall des Grenzmomentes (bei kleinem E_1) ergibt sich nach (26′)

$$h_1 = \frac{-\psi+\sqrt{\psi^2-8\sigma_a\Theta}}{4\sigma_a}\,, \tag{41}$$

worin

$$\psi = a(\sigma_m-\sigma_a)\ln\frac{c}{a}-\sigma_a h\,, \qquad \Theta = a(\sigma_m-\sigma_a)\left(a\ln\frac{c}{a}-h\right).$$

ist.

Nach Ermittlung von h_1 kann der Wert von $r=a+h_1$ und M_s (27′) berechnet werden.

5. Beispiele. a) Erstes Beispiel. Der rechteckige Querschnitt eines gekrümmten Stabes habe die Abmessungen $b=5$ cm, $h=10$ cm. Es wird angenommen $M=2$ tm, $a=10$ cm, $c=20$ cm, $\sigma_s=2400$ kg/cm², $\sigma_a=2160$ kg/cm², $E=2\cdot10^6$ kg/cm², $\xi=0{,}1$. Es sind die Lage der neutralen Achse der Grenze zwischen der elastischen und der plastischen Zone und die Spannungen in einer beliebigen Faser zu ermitteln.

Das Moment, das dem Fließbeginn entspricht, beträgt nach (13) 1,55 tm. Beim gegebenen Moment von 2 tm tritt der erste Spannungszustand auf. Die Gleichungen (35), (34) und (33) liefern

$$v=9{,}20\text{ cm},\quad t=1{,}86\text{ cm},\quad y_1=3{,}67\text{ cm},\quad y_2=5{,}53\text{ cm},\quad r=14{,}47\text{ cm}\,.$$

Die Höhe der plastischen Zone beträgt 0,80 cm. Die Spannungen ergeben sich nach (11) und (12) zu

$$\sigma = \frac{7044\,y}{14{,}47+y}, \qquad \sigma_u = -2160 + \frac{704{,}4\,y}{14{,}47+y}.$$

Der Spannungsverlauf ist in Abb. 10 dargestellt.

b) Zweites Beispiel. Die Abmessungen des Querschnittes und das Material des Stabes sind dieselben, jedoch wird $M = 2{,}8$ angenommen. Bei diesem Moment tritt der zweite Spannungszustand auf.

Die Gleichungen (40), (39), (38) und (16′) liefern der Reihe nach $v = 5{,}40$, $t = 2{,}78$ cm, $y_1 = 2{,}31$ cm, $y_2 = 3{,}35$ cm, $r = 14{,}76$ cm.

Die obere plastische Zone hat eine Höhe von 1,89 cm und die untere von 2,45 cm. Die Spannungen werden auf Grund (22), (23) und (24)

$$\sigma = \frac{12988\,y}{14{,}76+y}, \qquad \sigma_u = -2160 + \frac{1298{,}8\,y}{14{,}76+y}, \qquad \sigma_0 = 2160 + \frac{1298{,}8\,y}{14{,}76+y}.$$

Der Spannungsverlauf ist in Abb. 11 dargestellt.

Es ist dabei zu bemerken, daß das von der elastischen Zone aufgenommene Moment in diesem Fall nur 25 v. H. des gesamten Momentes beträgt.

Man ermittelt nun das Grenzmoment M_s, wenn $\sigma_m = 6160$ kg/cm² ist. Bei dieser Spannung beträgt die relative Verkürzung der unteren Außenfasern 2 v. H. Die Näherungsformeln (41) und (27′) liefern $h_1 = 4{,}67$ cm, $r = 14{,}67$ cm und $M_s = 5{,}17$ tm. Der Spannungsverlauf ist in Abb. 12 dargestellt.

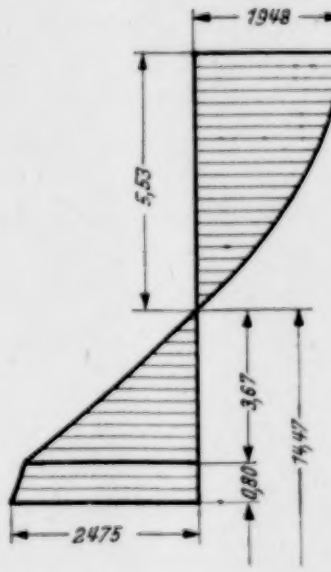


Abb. 10 Spannungsdiagramm für $M = 2{,}0$ tm.

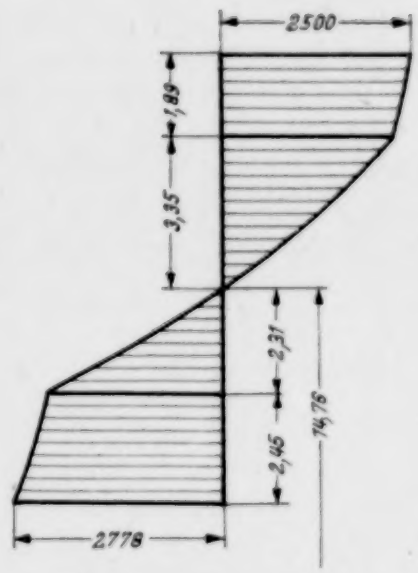


Abb. 11. Spannungsdiagramm für $M = 2{,}8$ tm.

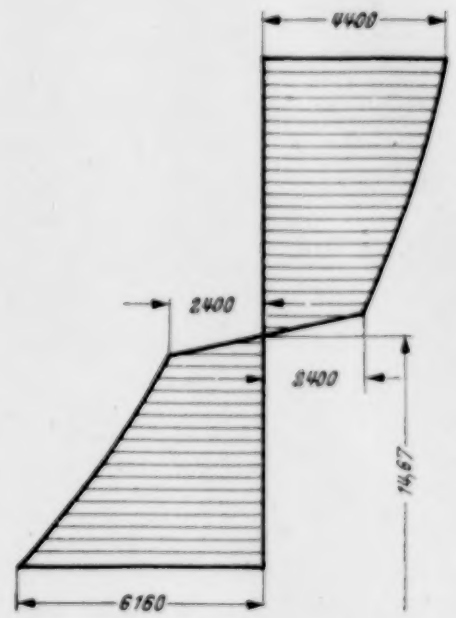


Abb. 12. Spannungsdiagramm für das Grenzmoment.

6. Schlußbemerkungen. Zweifellos kann der elastisch-plastische Zustand in manchen Konstruktionen ohne Nachteil für deren Verwendungszweck bewußt zugelassen werden.

Ohne zu der Frage, in welchen Konstruktionen plastische Formänderungen zugelassen werden können, Stellung zu nehmen, bemerken wir hier nur, daß die Zulassung der plastischen Deformationen eine wesentliche Materialersparnis ergeben kann, wie man aus den weiter unten dargestellten Berechnungen ersieht.

Tatsächlich wird unter der Annahme, daß wir für den oben betrachteten Stab mit $b = 5$ cm, $h = 10$ cm und einem Krümmungshalbmesser der geometrischen Achse von $\varrho = 15$ cm ein Moment von 2 tm zugelassen haben, die Spannung in den unteren Außenfasern 2475 kg/cm² betragen (Abb. 10). Dieser Spannung entspricht eine sehr geringe relative Verkürzung der unteren Fasern um 0,16 v. H. Bei einer solchen Spannung, die zwar σ_s übersteigt, besitzt der Stab noch einen genügenden Sicherheitsgrad von $n = \frac{1}{2}\,5{,}17 = 2{,}58$ gegenüber der Wirkung des Grenzmomentes $M_s = 5{,}17$ tm.

Bei der üblichen „elastischen" Berechnung ergibt sich für $M = 2{,}0$ tm die Querschnittshöhe h zu 11,8 cm und die Breite b zu 5,9 cm, wenn man die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 2000$ kg/cm²

annimmt und die Beziehung $h/b=2$ und den Krümmungshalbmesser $\varrho=15$ beibehält. Der oben angenommene Wert $\sigma_{zul}=2000$ kg/cm² ist für eine „elastische" Berechnung ziemlich hoch, weil $\sigma_s=2400$ kg/cm² ist. Die Materialersparnis beträgt infolge der Zulassung des elastisch-plastischen Zustandes 39,2 v. H. Die relative Verkürzung der unteren Fasern ist 0,1 v. H. bei einer Spannung von 2000 kg/cm².

Für das Moment $M=2{,}8$ tm beträgt die größte Spannung 2778 kg/cm² bei $b=5$ cm, $h=10$ cm und $\varrho=15$ cm (Abb. 11). Dementsprechend ist die relative Verkürzung 0,31 v. H. Der Sicherheitsgrad sinkt bis 1,85, was in manchen Fällen noch genügen dürfte.

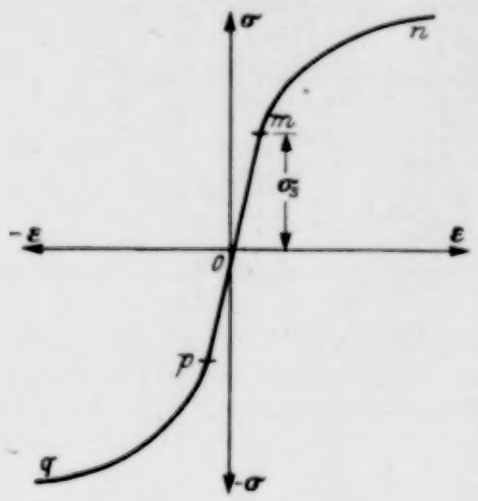


Abb. 13

Auf Grund der „elastischen" Berechnung erhalten wir, wenn $M=2{,}8$ tm, $\sigma_{zul}=2000$ kg/cm², $h/b=2$ und $\varrho=15$ cm ist, $h=13{,}4$ cm und $b=6{,}7$ cm. Die Materialersparnis beträgt 79,6 v. H.

Als wesentlicher Faktor zugunsten der Zulassung eines elastisch-plastischen Zustandes in den vorher betrachteten Fällen erscheint die geringe Größe der dabei entstehenden Formänderung des Stabes, worauf die Zahlenwerte der relativen Verkürzungen der Außenfasern hinweisen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß für die Mehrzahl der in der Praxis verwendeten Stähle ohne Fließteil in den (σ, ε) Diagrammen der Zahlenwert ξ kleiner als der in unseren Beispielen angenommene Wert $\xi=0{,}1$ ist. Mit der Verminderung von ξ wächst die Dehnung der Faser, die der gleichen Spannung entspricht.

Zum Schluß zeigen wir den allgemeinen Weg zur Lösung der Aufgabe für den Fall, daß die Spannungs-Dehnungs-Linie bei Spannungen über σ_s einen krummlinigen Verlauf hat (Abb. 13). Die Gleichungen der Geraden pm und der Kurven mn und qp sind

$$\sigma=E\cdot\varepsilon \qquad \sigma=f(\varepsilon), \qquad \sigma=f_1(\varepsilon).$$

Die Dehnungen können durch die Formeln (2) ausgedrückt werden. Es wird angenommen, daß das Verhalten des Werkstoffes sowohl beim Zug als auch beim Druck gleich ist.

Die Gleichgewichtsgleichungen für den zweiten Spannungszustand erhalten folgende allgemeine Form:

$$\int\limits_{(F_e)} E\,\varepsilon\,dF+\int\limits_{(F_u)} f_1(\varepsilon)\,dF+\int\limits_{(F_0)} f(\varepsilon)\,dF=0,$$

$$\int\limits_{(F_e)} E\,\varepsilon\,y\,dF+\int\limits_{(F_u)} f_1(\varepsilon)\,y\,dF+\int\limits_{(F_0)} f(\varepsilon)\,y\,dF=M.$$

Im ersten Zustand entfällt das dritte Integral in jeder dieser Gleichungen. Außer den Gleichgewichtsgleichungen müssen noch die Bedingungen eines stetigen Überganges für die Spannungen an den Grenzen der elastischen und der plastischen Zonen erfüllt werden.

(Eingegangen am 4. Oktober 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Waldemar Swida*, (17a) Karlsruhe, Stuttgarter Str. 21.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Von

R. Courant

o. Professor an der Universität Göttingen

Erster Band:

Funktionen einer Veränderlichen

Zweite, verbesserte Auflage

Neudruck 1948

Mit 126 Textfiguren. XIV, 410 Seiten. 1930

DMark 24.—

Inhaltsübersicht: Vorbereitungen — Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung — Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen — Weiterer Ausbau der Integralrechnung — Anwendungen — Die Taylorsche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale — Exkurs über numerische Methoden — Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse — Fouriersche Reihen — Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge.

Zweiter Band:

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage

Neudruck 1948

Mit 106 Textfiguren. VIII, 412 Seiten. 1931

DMark 24.—

Inhaltsübersicht: Vorbemerkungen über analytische Geometrie und Vektorrechnung — Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Ableitungen — Ausbau und Anwendungen der Differentialrechnung — Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher — Integration über mehrdimensionale Bereiche. Fortsetzung — Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Integralgleichungen

Einführung in Lehre und Gebrauch

Von

Dr. phil. ***Georg Hamel***

o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin

Mit 19 Abbildungen im Text

Zweite, berichtigte Auflage

VIII, 166 Seiten 1949 DMark 15.60

INHALTSÜBERSICHT:

I. Was ist eine Integralgleichung? Ergebnisse der mathematischen Theorie, insbesondere bei den linearen Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern.

Einleitende Bemerkungen — Einfachste Schwingungsaufgaben führen auf eine lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern — Zusammenhang mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung — Der elementare Teil der Theorie — Die Beziehungen der Integralgleichungen zu den partiellen Differentialgleichungen der Physik und andere physikalische Anwendungen — Durchführung der Theorie für die symmetrischen Kerne.

II. Weitergehende Ausführungen.

Die lineare Integralgleichung erster Art — Ausgeartete unsymmetrische Integralgleichungen zweiter Art — Die *Fredholm*sche Theorie — Das Verfahren von *Enskog* — *E. Schmidt*s Theorie der unsymmetrischen Kerne — Quellenmäßige Darstellbarkeit und Entwickelbarkeit — Die polare Integralgleichung — *Hilbert*s erster Weg über ein algebraisches Problem zur Lösung linearer Integralgleichungen — Die Methode der unendlich vielen Variablen — Der *Hilbert*sche Raum — Unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten — Die *Mathieu*sche Gleichung — *Abel*s Integralgleichung — Singuläre Kerne. Beispiele — Eine Integralgleichung aus der Theorie der Tragflügel — Die Integralgleichung von *L. Föppl* (Härteproblem von *Hertz*) — Einige weitere Orthogonalsysteme und ihre Kerne — Das Schwingungsproblem von *Duffing* — Nichtlineare Integralgleichungen — Namenverzeichnis — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.